Matematik – Grundskola åk 7–9 Modul: Dynamiska matematikprogram i undervisningen Del 2: Demonstration i helklass

### GeoGebra som demonstrationsverktyg

Mats Brunström och Maria Fahlgren, Karlstads universitet

I denna text fokuserar vi på hur lärare kan använda GeoGebra för att dynamiskt visualisera matematiska samband i helklass. Drijvers et al. (2010) har studerat hur olika lärare väljer att orkestrera en helklassundervisning där alla kan följa vad som händer på skärmen. De skiljer på lärarcentrerade och elevcentrerade sätt att demonstrera matematiska samband i helklass. I den lärarcentrerade demonstrationen 'explain-thescreen', är det läraren som förklarar vad som händer på skärmen med fokus på det matematiska innehållet. Denna typ av orkestrering motsvarar en traditionell lärarstyrd genomgång vid tavlan. Skillnaden är att läraren nu har möjlighet att dynamiskt visualisera det matematiska innehållet. En annan lärarcentrerad demonstration som förekom frekvent i studien av Drijvers med flera var 'technical demo', där läraren fokuserade på hur det digitala verktyget fungerar.

Drijvers med flera fann även att lärarna ibland använde det digitala verktyget för att öka interaktionen med eleverna så att det blev en diskussion kring vad som hände på skärmen. I denna elevcentrerade demonstration, 'discuss-the-screen', uppmuntrar läraren eleverna att ställa hypoteser som sedan kan testas. Det kan exempelvis handla om att gissa vad som händer med en linjes lutning då värdet på *k* ändras. Den direkta återkopplingen som ett dynamiskt matematikprogram erbjuder kan stimulera denna typ av helklassdiskussioner. Naturligtvis är det många aspekter som blir avgörande för vilken typ av diskussion det blir, inte minst vilka klassrumsnormer som råder. Skolforskningsinstitutet lyfter fram 'utforskande samtal' som eftersträvansvärda vid helklassdiskussioner i matematikundervisningen (Fredriksson med flera, 2017, s. XI). I dessa samtal uppmuntras eleverna till gemensamma matematiska resonemang där de engageras i varandras idéer för att uppnå en gemensam förståelse. Läraren kan stödja denna typ av samtal genom "... att ställa öppna frågor, lyssna noga på och ta tillvara elevernas matematiska idéer" (Fredriksson med flera, 2017, s. XI).

Även om den elevcentrerade demonstrationen är eftersträvansvärd så ställer den större krav på läraren eftersom den blir mer oförutsägbar, det vill säga det blir svårare att förutse vilka diskussioner som uppstår. Detta kan även innebära att läraren behöver vara beredd på att använda det digitala verktyget på ett sätt som inte var planerat från början.

### Applikationer

Ett vanligt begrepp för färdigkonstruerade demonstrationer i GeoGebra är applikationer eller appar. I denna text använder vi i huvudsak begreppet applikationer när vi syftar på färdigkonstruerade demonstrationer.

För att visualisera och diskutera matematiska samband i helklass behöver läraren antingen göra en egen konstruktion i GeoGebra eller utnyttja någon av alla de färdigkonstruerade applikationer som andra användare av GeoGebra har delat på www.geogebra.org. Även om det finns många bra applikationer på svenska så kan det vara intressant att använda någon applikation på annat språk. Till exempel finns det många väl genomarbetade applikationer på engelska som kan vara lämpliga att använda. Ibland kan en befintlig demonstration behöva anpassas för att fungera bra i en viss klass. För att en klassrumsdiskussion skall bli elevcentrerad behövs väl genomtänkta frågor. Nedan diskuterar vi lämpliga frågor att ställa utifrån tre exempel på färdiga applikationer konstruerade av Jonas Hall, föreståndare på Svenska GeoGebrainstitutet.

### **Exempel 1**

Det första exemplet handlar om slumpmässiga försök i form av den summa som fås vid kast med tärningar samt hur sannolikhetsfördelningen växer fram då antalet försök ökar. Applikationen är konstruerad så att antalet tärningar och antalet sidor på tärningarna kan varieras. Det är möjligt att göra ett eller 100 kast åt gången. I figur 1 visas exempel på resultat vid 10 respektive 1000 tärningskast. En helklassdiskussion där applikationen används kan förstås orkestreras på många olika sätt, bland annat beroende på elevernas kunskapsnivå och rådande klassrumsnormer. Nedan diskuteras några tänkbara sätt att möjliggöra en elevcentrerad demonstration.

### Figur 1.



Dynamisk applikation som simulerar kast med tärningar, se https://www.geogebra.org/m/xq9kpw25#material/uw9abccq

Innan applikationen används, kan läraren engagera eleverna genom att be dem i par/grupp att diskutera vilken summa de tror är vanligast vid kast med två 6-sidiga

tärningar. En fördel med de specifika valen, två 6-sidiga tärningar, är att det är något som de flesta elever troligtvis kan relatera till. Förhoppningsvis blir eleverna motiverade att se vad som händer när simuleringen därefter påbörjas. Om resultatet efter 10 kast liknar det i figur 1, blir troligtvis många elever förvånade, vilket i sin tur kan leda till intressanta diskussioner. Här kan det vara lämpligt att låta eleverna diskutera vad de tror att resultatet beror på innan de får diskutera hur resultatet bör se ut efter 100 kast, 200 kast och så vidare. När exempelvis 1000 tärningskast simulerats och diagrammet liknar det till höger i figur 1 kan det vara läge att låta eleverna försöka förklara varför resultatet ser ut som det gör. Ett nästa steg kan vara att öka antalet tärningar och/eller antalet sidor på varje tärning.

### Exempel 2

I nästa applikation, se figur 2, ingår sju olika tal som kan ändras genom att motsvarande blå punkter flyttas längs tallinjen. Applikationen är konstruerad så att medianen, den gröna punkten och medelvärdet, den röda punkten, automatiskt uppdateras.

#### Figur 2.

Dynamisk applikation för att illustrera median och medelvärde, se https://www.geogebra.org/m/xq9kpw25#material/VSdAv6rv



För att få eleverna engagerade, kan det vara fördelaktigt att ställa frågor där eleverna får diskutera och komma med förslag som sedan kan testas genom att punkter flyttas. Några förslag på frågor är:

- Vad händer med medianen och medelvärdet om vi flyttar ...?
- Vilket är det största värdet ni kan få på medianen genom att flytta en punkt?
- Hur kan punkterna placeras för att medianen ska bli 10 och medelvärdet ska bli så stort som möjligt?
- Hur kan punkterna placeras för att medelvärdet ska bli 20 och medianen ska bli så stor som möjligt?
- Hur kan punkterna placeras för att medelvärdet ska vara ett "missvisande" lägesmått?

### **Exempel 3**

Den tredje applikationen, se figur 3, handlar om längdskala, areaskala och volymskala. I applikationen ingår två ritområden. I det vänstra ritområdet visas en blå enhetskvadrat samt en röd kvadrat vars sidlängd kan justeras med hjälp av en glidare. Det högra tredimensionella ritområdet visar en blå enhetskub och en röd kub vars sidlängd kan varieras med samma glidare. Texten i den gula rutan där skalorna anges ändras dynamiskt när sidlängden på den röda kvadraten/kuben ändras.

### Figur 3.

Dynamisk applikation för olika skalor, se https://www.geogebra.org/m/xkfgcabv



Applikationen kan användas för att demonstrera kopplingen mellan de olika skalorna. Till att börja med kan eleverna få förklara varför de olika skalorna i textrutan fås då sidlängden är inställd på 2, som i figur 3. Därefter kan eleverna få diskutera vad de tror händer med skalorna om sidlängden ökar till exempelvis längden 3, innan läraren demonstrerar detta genom att dra i glidaren. På motsvarande sätt kan eleverna få fundera över vad som händer om sidans längd blir 4 respektive 5 och förhoppningsvis kan de se mönstret och formulera generella slutsatser. Då sidans längd även kan justeras så att den blir mindre än 1, finns möjlighet att demonstrera förminskningar.

Den information som synliggörs i en applikation kan spela stor roll för vilken typ av frågor som är lämpliga att ställa. Om vi exempelvis väljer att ta bort textrutan i applikationen i figur 3 kan istället läraren ställa in ett visst värde på sidans längd, till exempel värdet 2, och låta eleverna diskutera vilka skalorna är samt hur de skrivs.

### **Exempel 4**

För att konstruera de applikationer som har diskuterats ovan krävs viss vana att arbeta med GeoGebra. Vi avslutar med ett exempel på en applikation som är betydligt enklare att konstruera. Hur konstruktionen går till finns beskrivet i introduktionsguiden i Del 1. Konstruktionen, se figur 4, kan användas för att demonstrera area och omkrets hos trianglar med samma bas och höjd.

#### Figur 4.

Konstruktion för att undersöka area och omkrets hos trianglar med samma bas och höjd.



Konstruktionen är gjord så att de båda linjerna är parallella och punkterna D, E och F är flyttbara. I stället för att läraren direkt demonstrerar hur omkretsen ändras samtidigt som arean förblir densamma då punkten F flyttas, kan eleverna engageras genom att de får diskutera frågor som exempelvis:

- Vad tror ni händer med area och omkrets om punkten F flyttas?
- Vad tror ni händer med area och omkrets om punkten *E* flyttas?
- Var tror ni punkten F ska placeras för att omkretsen ska bli så liten som möjligt?
- Hur stor kan omkretsen bli?

### Elevcentrerade diskussioner

I exemplen ovan gavs ett antal förslag på hur demonstrationer med GeoGebra kan utvecklas till mer elevcentrerade diskussioner. Förslagen har handlat om att:

- låta eleverna diskutera i par eller små grupper innan deras förslag ligger till grund för en helklassdiskussion. Förutom att fler elever blir aktiva vid gruppdiskussioner, kan det vara en trygghet för eleverna att det är gruppens förslag som diskuteras.
- be eleverna gissa vad som kommer att hända på skärmen innan GeoGebra används för att visa vad som händer. På så vis får eleverna direkt återkoppling på sina

hypoteser. Denna uppgiftstyp, rekommenderas ofta för att stimulera matematiska resonemang (Laborde, 2002).

- be eleverna komma med förslag på *varför* vissa saker händer på skärmen. Om undersökningsresultat och gissningar inte stämmer överens är det extra viktigt att försöka förklara varför (Laborde, 2002). Enligt Arcavi och Hadas (2000) kan oväntade undersökningsresultat leda till att motivationen att söka förklaringar ökar och därmed kan även möjligheterna för elever att reda ut eventuella missuppfattningar öka.
- reflektera över eventuella behov av anpassning, vid användning av befintliga applikationer, för att kunna formulera mer öppna frågor. Det kan exempelvis handla om att dölja delar av applikationen för att eleverna själva ska få möjlighet att reflektera och ställa hypoteser.

I denna del har vi gett exempel på hur demonstrationer kan göras mer elevcentrerade. Motsvarande exempel skulle även kunna användas som elevaktiviteter där eleverna arbetar med GeoGebra.

### Referenser

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. C. & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234.

Fredriksson, K., Envall, I., Bergman, E., Fundell, S., Norén, E. & Samuelsson, J. (2017). *Klassrumsdialog i matematikundervisningen: matematiska samtal i helklass i grundskolan.* Skolforskningsinstitutet.

Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283–317.