

Taluppfattning och tals användning, F–åk 3

Den här modulen beskriver och problematiserar undervisning om taluppfattning i skolans tidigare år. Syftet med modulen är att ge en djupare förståelse av elevers utveckling av taluppfattning och nya insikter i hur undervisningen kan planeras, genomföras och följas upp.

Målet är att ni efter genomgången modul har fått en ökad innehållslig och didaktisk kompetens, och därigenom känner er stärkta i er roll som matematiklärare.

Varje del har ett uttalat didaktiskt perspektiv som exempelvis att bli medveten om elevers uppfattningar, att leda matematiska samtal eller att skapa förutsättningar för matematiska resonemang. Undervisning diskuteras i relation till laborativt arbetssätt, sociala normer och problemlösning.

Det matematiska innehållet lyfts tydligt fram. Taluppfattning och tals användning handlar om tal och räkneoperationer, vilket brukar benämnas aritmetik. I varje del i modulen finns en text som går lite djupare in på någon aspekt av aritmetiken som exempelvis likheter, uppdelning av tal, additiva och multiplikativa strukturer och bråk som del av helhet och del av antal.

I varje del finns förslag på aktiviteter som är möjliga att genomföra med elever från och med förskoleklass till och med årskurs 3. I modulen finns en innehållslig progression som börjar med grundläggande taluppfattning och ramsräkning, fortsätter med likheter, subtraktion och division och avslutas med bråk. Ni ges också möjlighet att fördjupa er i användning av olika representationer av tal och problemlösning med tal.

Modulen består av följande delar:

1. Tal och antal
2. Talsystem och räkneramsor
3. Likhet – olikhet
4. Additiva strukturer
5. Representationer av tal
6. Multiplikativa strukturer
7. Problemlösning med tal
8. Resonemang med bråk

Modulen är reviderad av NCM, Göteborgs universitet.

Del 1. Tal och antal

I denna del beskrivs olika aspekter av taluppfattning samt hur ni kan bygga upp en grundläggande taluppfattning. Ni får träna er i att "se" hur elever räknar samt kartlägga deras kunskaper genom iakttagelser och samtal.

Aktiviteten handlar om tals helhet och delar där eleverna experimenterar med uppdelning av tal på olika sätt.

Del 1: Moment A – individuell förberedelse

Läs

De båda texterna "Kritiska aspekter i lärandet om tal och antal" och "Att "se" hur barn räknar" beskriver grundläggande taluppfattning. Läs dem inför den gemensamma träffen i Moment B och titta också igenom aktiviteten "Tals helhet och delar".

Reflektera över följande frågor när du läser texterna:

- Vilka kritiska aspekter, matematiska idéer, metoder och modeller som beskrivs i texterna känner du igen?
- Vilka av dessa har du sett hos dina elever?
- Hur ser dina elevers lärandelandskap ut?

Material



Kritiska aspekter i lärandet om tal och antal
Berit Bergius



Att "se" hur barn räknar
Cecilia Kilhamn



Tals helhet och delar
Sträva 5A, NCM

Kritiska aspekter i lärandet om tal och antal

Berit Bergius, NCM

Vikten av att förstå innebörden i begreppet tal är välkänd. I det tidiga lärandet inser barn efterhand kopplingen mellan räkneord och siffror och att räkneorden också kan beskriva antalet föremål som finns i en väl avgränsad mängd. Antalet kan uttryckas skriftligt med hjälp av tal och talen skrivs med siffror. Kunskap om processen som leder från det lilla barnets tidiga möten med räkneord till att de kan använda räkneord och tal för att göra antalsbestämningar och beräkningar är viktig för alla lärare i tidiga skolår. Någonstans i den processen befinner sig eleverna när de kommer till förskoleklass eller årskurs 1. Denna text tar upp tre kritiska aspekter i lärandet om tal och antal: principer för räkning, skillnad mellan siffror och tal samt tals uppdelning.

Fem principer

För att det ska vara meningsfullt att arbeta med tal och räkning måste eleven ha förstått fem grundläggande principer. Forskarna Gelman och Gallistel (1986) har formulerat dem:

- *Abstraktionsprincipen* innebär att föremål i väl avgränsade och definierade mängder kan räknas. En grupp med fem leksaker kan räknas och betraktas som fem stycken.
- *Ett-till-ett-principen* innebär att ett föremål i en mängd kan bilda par med ett föremål i en annan mängd. Är antalet i de båda mängderna lika eller olika? Räcker bullarna så det blir en var? Det kan också vara att räkneord och föremål bildar par. En känd svårighet för nybörjare är att hålla samma takt för räkneord och föremål, till exempel att säga ett räkneord i taget och samtidigt peka på det som räknas eller hoppa rätt antal steg på en spelplan.
- *Principen om godtycklig ordning* innebär förståelse för att när vi räknar antalet föremål i en mängd spelar det ingen roll i vilken ordning vi räknar dem eller hur föremålen är grupperade. Det viktiga är att veta vilka man har räknat och vilka som återstår.
- *Principen om räkneordens ordning* handlar om att varje räkneord följs av ett annat bestämt räkneord. Kan man ordningen så vet man att 5 alltid kommer efter 4.
- *Antalsprincipen*, också kallad kardinaltalsprincipen, innebär att när varje föremål i mängden har parats ihop med ett räkneord så utgör det sist sagda räkneordet antalet föremål i hela mängden. Vi ”mäter” antalet föremål med hjälp av räkneorden. På frågan *hur många* det är i mängden, svarar nybörjare med att räkna alla en gång till. De tror att föremålen i mängden ”heter” respektive

räkneord. Elever som har förstått antalsprincipen upprepar eller betonar ofta det sista räkneordet för att markera att det skiljer sig från de övriga, att det betecknar hela mängden.

För att det ska vara meningsfullt att arbeta med tal och räkning behöver eleven förstå antalsprincipen och att antalet i mängden inte ändras om föremålen sprids ut. En annan grundläggande förmåga är att uppfatta ett litet antal ”i en blink”, vilket kallas att *subitiser*a, det vill säga utan att behöva räkna. De flesta uppfattar upp till 6–7 föremål på det sättet. Förmågan att subitiserar visar sig till exempel i att direkt uppfatta fem fingrar på handen eller en ”sexa” på tärningen.

Siffror och tal

I det dagliga livet används ofta uttryck som kan vara förvirrande och, om de inte reds ut, kan leda till missuppfattningar och svårigheter. Vad är till exempel skillnaden mellan siffror och tal? I media och i samtal möter vi uttryck som ”siffrorna är större än förväntat”, ”hur höga siffrorna blir”, ”det var längesedan vi hade så låga siffror”. Barn och unga elever kan genom sådana uttryck blanda samman storlek på talet med siffrors fysiska storlek (Figur 1).

Figur 1

Liten och stor siffra att jämföra med litet och stort tal

8 3 2 999

Tal kan vara stora eller små och värden kan vara höga eller låga oavsett storleken på siffrorna de representeras av. Ett annat ord som kan förväxlas med ordet tal är ordet nummer. På svenska motsvarar ett nummer inget antal. Ofta uttrycker nummer en ordningsföljd, som i könummer och husnummer. Får jag könummer 387 så vet jag att när 386 ropas upp är det min tur nästa gång, men det behöver inte betyda att det finns 386 personer i lokalen. I vardagligt tal använder vi också nummer som identifikation, till exempel husnummer, telefonnummer och personnummer. Ofta har det funnits någon ordning i grunden när dessa nummer började användas, men med tiden har ordningen förlorat betydelse. Skillnaden mellan tal och nummer finns inte i alla språk och eftersom många elever idag har andra modersmål kan det vara värt att uppmärksamma i undervisningen. Exempelvis heter både tal och nummer ’number’ på engelska.

Ett sätt att motverka beskrivna missuppfattningar är att använda korrekta begrepp och uttryck redan från början i matematikundervisningen. Vygotskij (1999) lyfter fram betydelsen av att vuxna i samspelet med barn och elever utmanar både språk och tänkande. Genom många möten med ord och begrepp, i meningsfulla och varierade situationer, införlivas dessa i elevens eget språkbruk och begreppsapparat. Ett medvetet, korrekt och

konsekvent språkbruk hjälper barn och elever att utveckla korrekt förståelse för begreppen siffra, tal och nummer.

Kiselman och Mouwitz (2008) gör följande definitioner:

siffra ”tecken som representerar ett naturligt tal”

tal ”grundläggande matematiskt begrepp som i sin enklaste form anger antal eller ordning i en följd. Ett tal representeras av en eller flera siffror.”

Tals helhet och delar

I det tidiga arbetet med tal och antal är de konkreta inslagen både nödvändiga och vanliga. Elever kan få möta frågeställningar som:

- Hur många bollar ligger i lådan?
- Hur många av dem är gula?
- Hur många är röda?
- Vilken färg finns det flest av?
- Hur många fler/färre är gula?
- Hur stor skillnad är det mellan antalet röda och antalet gula bollar?

Vi leder in elevernas tänkande på tals helhet och delar och använder muntliga språkuttryck som representerar ett matematiskt sammanhang. För att utveckla sitt lärande behöver elever kunna tolka andras muntliga uttryck och själva kunna uttrycka sig med hjälp av matematiska begrepp. Genom att lyssna till, tolka och använda matematiska uttryck utvecklas språket. Eleverna behöver återkommande och varierade erfarenheter av övergången från muntliga uttryck till det skrivna matematiska symbolspråket för att göra de skriftliga symboluttrycken till sina.

Definitionen av ett enskilt naturligt tal i talraden kan vara att det är lika med *det föregående talet* + 1. Talet 2 kan då definieras som $1 + 1$, talet 3 som $2 + 1$ och så vidare. Men ett enskilt tal i talraden, till exempel 7, är inte bara $6 + 1$ utan också $7 + 0$; $5 + 2$; $4 + 3$ et cetera. Genom att uppfatta talen i grupperingar kan vi systematisera och kontrollera större mängder. Tio är lika mycket som två femmor, en sexa och en fyra, eller en sju och en trea. Sådant kunnande underlättar i situationer som handlar om uppdelning av tal på olika sätt. Exempel: Tio barn ska dela upp sig i par. Hur många par får vi? Tjugo personer ska äta vid fem bord. Hur många kan sitta vid varje bord?

Historiskt har olika vägval påverkat människans lärande i matematik. Det romerska systemets struktur och symboler för fem, femtio, femhundra gav gott stöd för att hantera tal. Många menar att det indoarabiska systemets tiobas är lite för stor för människans förmåga att uppfatta antal ”i en blink”. Av det kan man dra slutsatsen att helheten fem och dess delar är en viktig grund (Neuman, 1989). Säkerhet i de första tio talens helhet och delar, det vi ibland kallar liten additions- och subtraktionstabell, och att kunna göra omgrupperingar

är nödvändigt för att hantera mer komplexa tal. Alistair McIntosh, som ägnat sitt forskarliv åt att utveckla elevers och lärares kunnande om tal och räkning, menar att man i undervisningen ska gruppera kombinationerna så att de som bygger på en viss strategi behandlas tillsammans. Den struktur han rekommenderar för undervisningen är följande (McIntosh, 2020):

1 fler (+1) $2 + 1; 3 + 1; 4 + 1; 5 + 1; \dots, 8 + 1$; och omvänt $1 + 2; 1 + 3$ och så vidare.

2 fler (+2) $3 + 2; 4 + 2; 5 + 2; 6 + 2; 7 + 2$ och omvänt $2 + 3; 2 + 4, 2 + 5$ och så vidare.

3 fler (+3) $4 + 3; 5 + 3; 6 + 3$ och omvänt $3 + 4; 3 + 5; 3 + 6$ och så vidare.

Inga fler (+0) $1 + 0; 2 + 0; 3 + 0; 4; \dots, 9 + 0$ och omvänt $0 + 1; 0 + 2$ och så vidare.

Tiokamrater $10 + 0; 9 + 1; 8 + 2; 7 + 3; 6 + 4; 5 + 5; 4 + 6; 3 + 7; 2 + 8; 1 + 9$

Dubblor $0 + 0; 1 + 1; 2 + 2; 3 + 3; 4 + 4; 5 + 5$

Undervisningen bör inriktas på att eleverna ska kunna härleda subtraktionskombinationerna ur additionskombinationerna, till exempel $3 + 2 = 5 \rightarrow 5 - 3 = 2; 5 - 2 = 3$.

Elever som inte automatiserar de första tio talens helhet och delar fastnar ofta i ett till ett-räkning, det vill säga för $4 + 2$ räknar de med konkret material, eller med hjälp av fingrarna, först upp de fyra och sedan ytterligare två innan de räknar fram svaret. De räknar antingen alla föremålen eller utgår från någon av delmängderna, två eller fyra, för att få fram summan. Andra dubbelräknar genom att säga nästa räkneord och samtidigt hålla ordning på hur många ord de har sagt. För $2 + 7$ räknar de tre^{ett}, fyra^{två}, fem^{tre}, sex^{fyra}, sju^{fem}, åtta^{sex}, nio^{sju}, en komplicerad och i längden ohållbar kognitiv utmaning. Det blir omöjligt att hålla isär de parallella räkneramsorna.

Det är viktigt att eleverna också automatiserar stor additionstabell. McIntosh (2020) föreslår följande struktur för den:

Lägg till 10 $10 + 1; 10 + 2; \dots; 10 + 8; 10 + 9$ och omvänt $1 + 10; 2 + 10$ och så vidare.

Dubblor $6 + 6; 7 + 7; 8 + 8; 9 + 9; 10 + 10$

Nio plus $9 + 2; 9 + 3; 9 + 4; \dots, 9 + 7; 9 + 8$ och omvänt $2 + 9; 3 + 9$ och så vidare.

Åtta plus $8 + 3; 8 + 4; 8 + 5; 8 + 6, 8 + 7$ och omvänt.

Sju plus $7 + 4; 7 + 5$ och omvänt.

Nära dubblor $4 + 5; 5 + 6; 6 + 7; 7 + 8$ och omvänt.

Liksom med kombinationer inom tio menar McIntosh att undervisningen ska ge eleverna erfarenheter som hjälper dem att härleda subtraktioner ur automatiserade

additionskombinationer. Grunden för att förstå och kunna använda räknelagar som underlättar beräkningar ligger i att inledningsvis veta vilka två tal som tillsammans bildar en bestämd helhet. Ett exempel: $7 + 8 \rightarrow$ omgruppera till $5 + 2 + 8 \rightarrow 10 + 5$ alternativt $7 + 7 + 1 \rightarrow 14 + 1$ och på motsvarande sätt $8 + _ = 15$; $15 - 7 = _$ et cetera.

Exemplet $57 + 86 = _ + 84$ handlar om omgruppering. Det speglar elevens förmåga att se relationen mellan ingående tal och att uppfatta sambandet mellan dem, det vill säga att kunna använda den associativa lagen $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Elever behöver många och olika erfarenheter för att vidga sitt kunnande i ett talområde. De tio första talen behöver följs upp i större talområden genom systematiskt arbete. Det är inte självklart för elever att $300 + 500$, $13 + 5$, $103 + 5$, respektive $800 - 500$, $48 - 5$, $48 - 45$ och så vidare bygger på att talet 8 kan beskrivas som $3 + 5$. Lärare kan tro att när elever har förståelse för helhet och delar i ett litet talområde, kan de på egen hand generalisera till större talområden. Så är det inte, men medveten och strukturerad undervisning där eleverna får många och olika erfarenheter kan hjälpa dem att utveckla sin förmåga att generalisera.

Referenser

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.

Kiselman C., & Mouwitz L. (2008). *Matematikterminologi för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh A. (2020). *Förstå och använd tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Nordisk Juridik AB.

Vygotskij, L. (1999). *Tänkande och språk*. Daidalos.

Att ”se” hur barn räknar

Cecilia Kilhamn, NCM

”Kan du berätta hur du tänker?” Det är en av de svåraste frågor du kan ställa till ett barn. Först ska barnet tänka, sedan vara medveten om sina tankar och därefter kunna sätta ord på tankeprocessen. Allt detta utan att ha ett fullt utvecklat språk. Att kunna berätta om sina tankar är att ta ett metaperspektiv på tänkandet. Även för den som klarar det är det inte säkert att den process som beskrivs är densamma som den som faktiskt ägde rum. I efterhand är det alltid en rekonstruktion. Givetvis är det en viktig kunskap för elever i alla åldrar att lära sig sätta ord på sina matematiska resonemang och beskriva olika tankebanor, men förmågan att tänka matematiskt kan finnas utanför språket och utvecklas parallellt med det. Att förstå matematik och tänka matematiskt handlar både om att utveckla en intuitiv förståelse för matematiska idéer och samband, och om att kunna föra logiska resonemang kring matematiska idéer med hjälp av naturligt språk och matematiska representationer. Ju yngre eleven är desto svårare är det för läraren att få inblick i vad det är eleven förstår och kan i matematik. Det är omöjligt att ge en skriftlig diagnos och svårt för eleven att berätta. Hur ska en lärare kunna ”se” vad en elev kan när eleven inte själv kan berätta? Den här texten har som ambition att förse läraren med några enkla redskap för att bedöma elevers grundläggande taluppfattning.

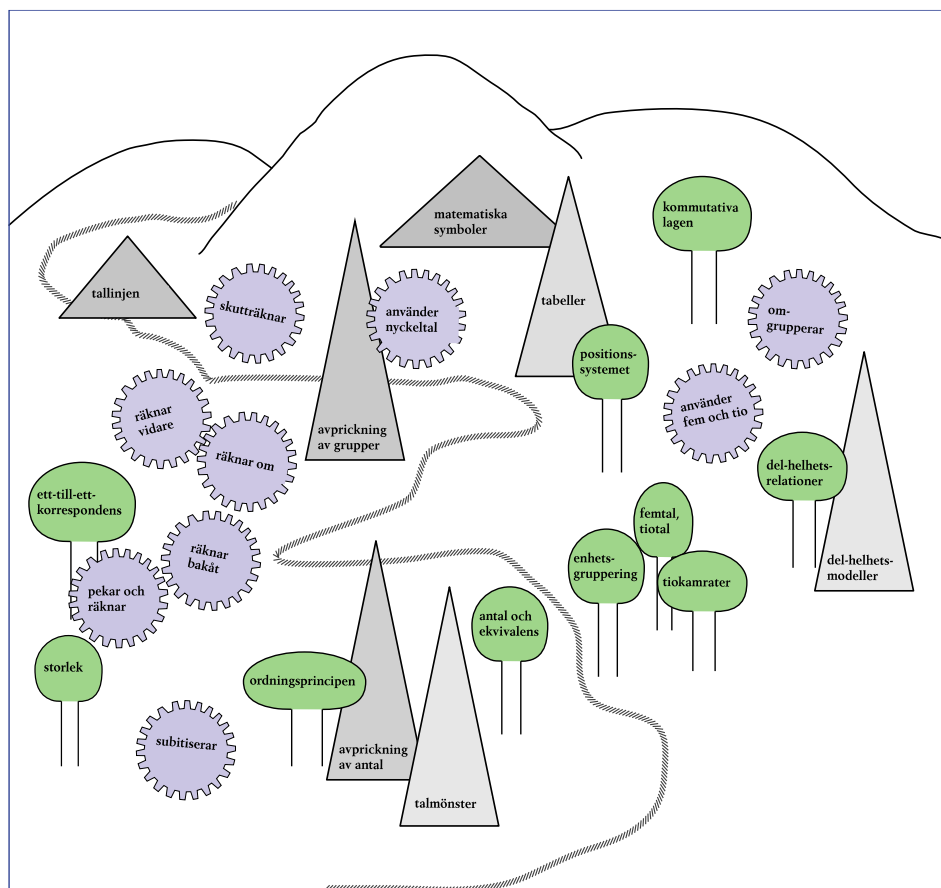
Lärandelandskapet för taluppfattning

Ett sätt att betrakta kunskap i matematik är att se lärandet som en resa genom ett lärandelandskap, en resa som kan ta olika vägar och där resenären kan dröja sig kvar olika länge på olika platser. Resans mål är inte att komma fram till en förutbestämd plats, utan att lära känna landskapet, lära sig hitta i det och kunna röra sig fritt från en plats till en annan. Det är en lärandemetafor som bland annat har utvecklats i undervisningsmaterial från *Mathematics in the City* i New York och som finns beskrivet i deras bokserie *Unga matematiker i arbete* (Fosnot & Dolk, 2018). Om lärande betraktas som en resa i landskapet kan eleverna göra upptäckter var de än befinner sig och oavsett om de varit där förut eller inte. Ibland kan förkunskaper underlätta. Vissa stigar är lättare än andra att färdas på. Men det går att ta sig fram till samma punkt från olika håll, eller finna en egen väg i stiglös terräng. Ibland kan en elev hitta en genväg, eller upptäcka likheter mellan olika landmärken trots att de förefaller ligga långt ifrån varandra.

Lärarens uppgift blir att hålla koll på var i landskapet eleverna befinner sig och för att göra det möjligt behöver läraren ha en karta över landskapet (Figur 1). En viktig kunskap hos läraren blir att göra klart för sig vilka landmärken, som kan beskrivas i termer av matematiska idéer, metoder och modeller, som eleverna behöver komma till.

Figur 1

Exempel på lärandelandskapet för den grundläggande taluppfattningen



Träden innehåller matematiska idéer, kugghjulen visar metoder och på bergen finns modeller. Det finns oändligt många sätt att ta sig mellan dessa landmärken, inte bara längst där här utritade stigen. Det viktiga är att varje elev bekantar sig med hela landskapet och lär känna alla landmärken på sin väg mot horisonten.

Matematiska idéer

De matematiska idéerna som ligger till grund för elevers taluppfattning bygger på den sammanställning som gjordes av Gelman och Gallistel (1986) och har sedan utvecklats av många matematikdidaktiker under de senaste decennierna. Här sammanfattas några av de viktigaste (Fosnot & Dolk, 2018):

- storlek – förmågan att urskilja större/mindre
- antal och ekvivalens – förmågan att urskilja fler/färre och lika många
- ett-till-ett-korrespondens mellan räkneord och objekt samt att det sist uttalade räkneordet anger antalet i mängden

- ordningsprincipen – varje tal har en bestämd efterföljare
- del-helhetsrelationer – att en helhet kan delas upp i delar
- enhetsgruppering – att en grupp objekt kan räknas som ett
- femtal och tiotal som viktiga enheter att gruppera i
- positionssystemet – att siffrans plats i talet bestämmer dess värde
- tiokamrater – det speciella med talet tio i vårt talsystem
- kommutativa lagen för addition – exempelvis att $2 + 3 = 3 + 2$.

Metoder

Med metoder menar Fosnot & Dolk (2018) olika tillvägagångssätt och visualiseringar som eleven har till sitt förfogande för att räkna och beräkna antal. I engelskspråkig litteratur används ofta ordet strategier men för att undvika en sammanblandning problemlösningstrategier används här termen metoder för räkning och beräkning. Grundläggande metoder är när elever:

- subitiserar – uppfattar ett mindre antal utan att räkna
- pekar och räknar med hjälp av räkneramsan
- räknar om – räknar delar för sig och sedan helheten från början vid addition
- räknar vidare från ett tal utan att börja om från början
- räknar bakåt
- skutträknar – räknar uppåt i grupper om exempelvis två, fem eller tio
- använder nyckeltal – räknar vidare till jämna tiotal och andra behändiga tal
- delar upp och omgrupperar tal
- använder fem-strukturen och tio-strukturen.

Modeller

Fosnot och Dolk (2018) använder modeller som representationer av tal och beräkningar för att visualisera och strukturera en situation. Modellen underlättar både kommunikation och tankeverksamhet. För den grundläggande taluppfattningen är följande modeller användbara:

- avprickning av antal
- avprickning av grupper – ett streck representerar en hel grupp och samtidigt alla i gruppen, till exempel att ett tiotal innehåller tio ental
- talmönster – som på en tärning eller fingertal
- tallinjen
- tabeller

- del-helhets-modeller
- matematiska symboler såsom siffror, operationer och likhetstecken.

Att resa i lärandelandskapet

God undervisning ger eleverna möjlighet att uppleva och utforska de matematiska idéer, metoder och modeller som utgör landmärken i lärandelandskapet. Eleverna behöver försättas i situationer där de upplever ett behov av att räkna, sortera, gruppera, lägga samman, plocka isär och jämföra. Lärarens uppgift blir att iscensätta situationer där lärandet kan äga rum och där det också blir möjligt att se var i landskapet den enskilde eleven befinner sig, vilka landmärken som är bekanta, och vilka som ligger inom räckhåll eller vid horisonten.

Eleverna inventerar sitt klassrum

En dag får vi möjlighet att besöka elever i en förskoleklass när de arbetar med att inventera klassrummet. Lektionen har planerats utifrån materialet *Organisera och inventera* (Liu, Dolk & Fosnot, 2020), där eleverna får i uppgift att inventera allt material som finns i klassrummet. Eleverna får parvis ansvar för att räkna och redovisa hur många av varje sorts föremål det finns i olika lådor, burkar och askar, på hyllor och i skåp. Det kan handla om antal böcker och skrivhäften, pennor och suddgummi, laborativt plockmaterial, linjaler, saxar, kriter och allehanda andra ting. Läraren ser till att antalet som eleverna ska räkna ligger inom ett för dem lagom stort talområde. De ska inte kunna avgöra antalet genom enbart subitisering. Helst ska det vara så många saker att de känner ett behov av en mer effektiv strategi än att räkna upp, exempelvis att organisera i högar och gruppera i femtal eller tiotal. Läraren är ute efter att få syn på vilka räknemetoder eleverna använder och hur de hanterar tal. Det finns mellan 10 och 50 böcker och häften i varje låda, men mellan 30 och 250 pennor och andra småsaker. Eleverna får först i uppgift att räkna det som finns i en låda, sedan att summera hur många som finns i flera lådor. Lite senare, en annan lektion, kommer inventeringen att utvidgas till att innehålla mer avancerade frågor om hur många fler som behövs för att göra jämna tiotal eller för att komplettera till full klassuppsättning.

Inledningsvis får eleverna helt fria händer att lösa uppgiften med att räkna och bokföra på egen hand. Läraren iakttar dem för att notera deras idéer och metoder och stöttar genom att be dem beskriva vad de gör. Exempel på lärarens stöttande frågor är:

- Hur vet ni vilka föremål ni redan har räknat och vilka som är kvar att räkna?
- Hur kan ni lägga föremålen så det går lättare att hålla reda på vilka ni har räknat och vet hur många det är?
- Hur kan ni bokföra resultatet så att alla andra kan se vad ni kommit fram till?

När alla är klara samlas elever och lärare till ett gemensamt samtal där de olika sätten att bokföra jämförs och diskuteras.

Att se och notera

För eleverna är den inledande fasen då de arbetar självständigt en möjlighet att utforska tal och antal. Läraren ska inte störa genom att tala om för dem hur de ska tänka utan lita till deras kreativitet. Lärarens input kommer i form av frågor och i det uppföljande samtalet där elevernas egna idéer och metoder fungerar som utgångspunkt. För läraren är den inledande fasen en möjlighet att utforska elevernas tänkande.

För att kunna bedöma var eleven befinner sig behöver man som lärare veta i detalj vad man ska titta efter och ha ett bra sätt att notera elevens idéer och metoder. Här följer förslag på en arbetsgång:

1. Börja med att rita upp det lärandelandskap dina elever befinner sig i. Vilka landmärken finns där? Vad är det du ska titta efter och vad vill du hjälpa eleverna att utveckla? Vad tror du att du kommer att se?
2. När eleverna arbetar självständigt, titta då aktivt efter tecken på att de befinner sig vid några av landmärkena. Lyssna, titta och notera vad du ser, vilka idéer som kommer upp och vilka metoder eleverna använder. Gör skriftliga anteckningar av vad du ser. Anteckningarna kan vara korta och enkla men bör göras i stunden, inte när lektionen eller dagen är över, för då har du glömt vad du såg. Anteckningarna kan göras på individnivå eller på gruppnivå som en förberedelse för det gemensamma klassrumssamtalet. Här är exempel på vad som kan noteras:
 - Hur organiserar eleverna föremålen som ska räknas?
 - Flyttar de runt dem, lägger de dem på rad eller grupperar de?
 - Grupperar de efter antal, exempelvis i högar om fem eller tio, eller grupperar de efter andra egenskaper hos föremålen?
 - Stämmer deras sätt att organisera föremålen med den metod de använder för att räkna dem?
 - Räknar de en i taget? Skutträknar de?
 - Relaterar de till positionssystemet? Växlar de mellan tiotal och ental på ett korrekt vis?
 - Uttrycker de 50 både som femtio föremål och som fem tiotal (fem grupper om tio)?
 - Läger de ihop delsummor?
 - Är deras metoder effektiva? Ger de korrekta resultat?
 - Finns en god överensstämmelse mellan elevernas sätt att räkna och deras sätt att bokföra sitt räknande?
3. Samla alla elevernas dokumentationer så att ni kan prata om dem under det uppföljande klassrumssamtalet. Fråga eleverna om de förstår varandras bokföring och om de kan hitta sätt att göra redovisningen av antal tydligare. Fokusera olika modeller och diskutera med eleverna hur deras arbetsprocess och resultat skulle se ut om en annan modell användes. Introducera nya modeller för att visualisera vad eleverna beskriver. Fokusera även elevernas olika metoder och låt dem jämföra dem.
4. Komplettera lektionens anteckningar med iakttagelser från det gemensamma samtalet. Vilka landmärken i lärandelandskapet finns kvar att utforska? Använd sedan dina

anteckningar för att planera nya aktiviteter där eleverna ges möjlighet att röra sig på nya stigar i landskapet och utveckla förtrogenhet med den grundläggande taluppfattningens matematiska idéer, metoder och modeller.

Referenser

Eriksson, P., & Kilhamn, C. (2019). Resa i ett lärandelandskap. *Nämnamn*, (3), 15–20.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2018). *Unga matematiker i arbete. Taluppfattning och de fyra räknesätten*. Studentlitteratur.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.

Liu, N., Dolk, M., & Fosnot, C. T. (2020). *Organisera och inventera*. Studentlitteratur.

5A

Tals helhet och delar

UTTRYCKSFORMER – TALUPPFATTNING

Avsikt och matematikinnehåll

Många effektiva beräkningsstrategier bygger på att tal kan sättas samman till större helheter eller delas upp i mindre delar. I denna aktivitet får eleverna experimentera med uppdelning av tal och för att ge sådana problem en konkret mening kan det vara en fördel att använda olika kontexter.

I aktiviteten finns förslag som kan ge eleverna erfarenhet av hur tals helhet och delar kan uttryckas med olika representationer.

Förkunskaper

Gelman och Gallistels fem principer: ett-till-ett-principen, principen om räkneordens ordning, antalsprincipen, abstraktionsprincipen och principen om godtycklig ordning.

Material

Sammantaget till samtliga aktiviteter behövs plockmaterial, tygbitar, stövlar, bollar, tvåfärgade markörer (gul-röda), hundrarutor, dels på papper till eleverna och dels projicerad på tavlan, färgpennor eller kriter. Hundrarutor 1–100 för utskrift finns på ncm.gu.se/matematikpapper. Läs mer exakt på respektive aktivitet.

Beskrivning

Aktiviteterna ger möjlighet att lyfta fram flera uttrycksformer: konkret och laborativt, bild och numeriska uttryck så att eleverna får erfarenhet av samband mellan olika representationer.

Tidigare erfarenheter av att uttrycka och förklara tals helhet och delar på olika sätt varierar mellan elever och det finns därför olika sätt att genomföra aktiviteterna. Planera så att eleverna i varje aktivitet får arbeta enskilt, i par och diskutera i helklass.

Introduktion

I varje förslag finns ett förslag till gemensam introduktion.

Uppföljning

I varje förslag finns förslag till gemensam diskussion. När allt material är undanplockat kan det också vara bra att låta eleverna sammanfatta lektionen i sin helhet. Vad har de gjort? Vad var nytt? Är det något de funderar på? ...?

Variation

Aktivitetsförslagen kan alla varieras. Använd kort med prickar istället för markörer, byt Pettsson och Findus till andra sagofigurer, använd hundrarutor till att söka mönster som inte har direkt koppling till talet hundra, byt apor mot andra djur i annat sammanhang som på bondgården eller i djurparken.

Utveckling

Utvidga efter hand till allt högre talområden. Vad händer om Findus vill gömma 24 klädnypor? Skriv istället ut 200-rutor. Dela vrålapornas bananer så de kan få både hela och halva bananer.

Erfarenheter

När yngre elever ska lösa problem åt exempelvis kända sagofigurer engageras de ofta på ett djupare sätt än om uppgifterna handlar om dem själva eller om enbart tal. När de ska lösa någon annans problem vågar de pröva fler strategier och särskilt inledningsvis har sammanhanget en viktig roll.

Ursprung

Lektionsförslag i Skolverkets modul *Taluppfattning och tals användning* åk 1–3.

Tals helhet och delar

Förslag 1: I en blink

Material

Plockmaterial som markörer, dekorationsstenar eller knappar, tygbitar eller pappers-handdukar.

Gemensamt arbete

En grundläggande förmåga för att uppfatta allt större antal är att kunna subitiserat, vilket innebär att uppfatta ett litet antal "i en blink". Forskning har visat att en del djur som exempelvis kråkfåglar har förmåga att uppfatta ett mindre antal föremål utan att "genomföra en beräkning". Nästan nyfödda bebisar kan i regel också se skillnad på en och två föremål.

Förmågan att subitiserat kan och bör utvecklas. Dels handlar det om att få allt fler erfarenheter av att göra snabba uppskattningar av ett fåtal föremål, dels att lära sig se mönster för att med säkerhet kunna se allt större mängder i en blink. Elever som är säkra på att de uppfattar ett mindre antal korrekt behöver inte alltid börja räkna från ett då de exempelvis ska addera två mindre mängder.

Lägg utan att eleverna ser det upp ett fåtal lite större föremål och lägg en tygbit över. Säg åt eleverna att vara beredda och dra snabbt undan tyget. I denna aktivitet är det fritt fram att ropa rätt ut vilket antal det är. Fortsätt en stund med olika antal så alla hinner förstå vad aktiviteten går ut på.

Pararbete

Eleverna fortsätter arbeta i par där en gömmer ett antal markörer eller dylikt under en tygbit och rycker bort medan den andre snabbt säger hur många det är. Be eleverna diskutera om de kan komma på något knep för att snabbt kunna vara säkra på allt högre antal.

Gemensam diskussion

Diskutera tillsammans de knep som eleverna har kommit på. Troligen har flera insett att det är enklare om de lägger markörerna i ett visst mönster. Titta tillsammans på hur prickarna på tärningar och dominobrickor är ordnade. Jämför även med hur kulorna är ordnade på kulramar.

Tals helhet och delar

Förslag 2: Findus bollar

Material

Tre bollar och ett par stövlar för gemensam introduktion, tio gul-röda markörer till varje elevpar.

Gemensamt arbete

Katten Findus tänker busa med Pettson. Han ska gömma sina tre bollar i Pettsons stövlar.

- Hur många bollar har Findus?
- Hur många stövlar har Pettson?

Observera om det finns någon elev som inte subitiserar, det vill säga uppfattar antalet i en blink, utan räknar fram antalet. Se i så fall föregående aktivitet.

- Findus funderar på om han ska gömma bollarna i den ena eller i båda stövlarna.

Låt eleverna beskriva med ord hur Findus kan göra. Undersök de olika förslagen praktiskt. Se till att alla möjligheter kommer med och att olika elever kommer till tals. Dokumentera lösningarna gemensamt, med bilder på bollar och stövlar, till exempel:



Använd dokumentationen som underlag för fortsatta samtal. Ställ frågor som:

- Hur många bollar har Findus kvar att gömma när han lagt 1, 2, 3 bollar i Pettsons stövlar?

Pettson lägger bollarna han hittar på bordet.

- Har han hittat alla när det ligger 1, 2, 3 bollar på bordet?

Nu vill Pettson skoja med Findus och gömmer bollar på andra ställen.

- Hur många har Pettson gömt om Findus ser 1, 2, 3 eller inga bollar på bordet?

Pararbete

Eleverna ska fortsätta arbeta i par med ett annat antal inom de första tio talen, men gör först en gemensam undersökning så arbetsgången blir tydlig. Använd tvåfärgade (gul-röda) markörer som är lätta att rita av. Risker är annars stor att själva ritandet tar fokus från matematiken. Lägg fem markörer med den röda sidan uppåt.

- Hur många är röda och hur många är gula?

Ni ska berätta för varandra hur många det är. Rita och färglägg sedan var sin bild. Lägg tillsammans en ny rad med fem röda markörer och vänd den sista i raden.

- Hur många är röda och hur många är gula?

Fortsätt att lägga fler rader och vänd på två, tre och så vidare markörer i slutet av raden. Berätta för varandra. Rita och färglägg en bild.

Överlämna aktiviteten till eleverna och säg att de ska fortsätta på samma sätt två och två. De ska bestämma ett antal, lägga upp det, berätta för varandra vad de ser och rita av. Hur många olika kombinationer blev det?

De fortsätter sedan med ett annat antal, ställer hypotes och prövar om den stämmer.

Gemensam diskussion

Diskutera tillsammans hur många kombinationer det kan bli för talen 1 till 10.

- Kan vi veta det utan att först undersöka?

I ett senare skede införs skriftliga sifferuttryck. Diskutera hur man skriver "ingenting" med siffror – det vill säga lyft fram nollans betydelse och hur man skriver det som muntligt uttrycks 'och' (fyra röda *och* en gul). Arbeta fram sifferuttrycken tillsammans, med stöd i det laborativa materialet och dokumentationen.

$$5+0 \quad 4+1 \quad 3+2 \quad 2+3 \quad 1+4 \quad 0+5$$

- Är $5+0$ och $0+5$ lika många?

Visa på att fem röda och ingen gul är lika många som fem gula och ingen röd. (Senare lyfts innebörden i den kommutativa lagen fram, $5+0=0+5$). Låt eleverna hitta på enkla räknehändelser för de olika uttrycken.

Ställ också frågor som synliggör sambandet till öppna utsagor och till subtraktion.

- Vi har fem markörer. Hur många röda markörer har vi om vi ser 2/4/5 och så vidare gula?

$$5 = 2 + _$$

$$5 = 4 + _$$

$$5 = 5 + _$$

$$5 - 2 = 3$$

$$5 - 4 = 1$$

$$5 - 5 = 0$$

Elever med god förståelse för talfakta inom de tio första talen kan utmanas i ett större talområde som hela tiotal eller hundratal. Det är lättare att generalisera till hela tio-, hundra-, tusental och så vidare än till "tontalen" och det är därför lämpligt att först arbeta med dem, till exempel uppdelning av talet 70 i hela tior eller talet 900 i hundringar. De muntliga språkliga uttrycken för "tontalen" är en barriär att ta sig förbi och kan därför komma senare.

För elever som redan behärskar detta, se förslag 3 och 4.

Tals helhet och delar

Förslag 3. Lika summor – hundrakamrater

Material

En hundraruta (1–100) till varje elevpar och en hundraruta projicerad på tavlan, färgpennor eller kriter. Skriv i förväg upp ett antal tvåsiffriga och ensiffriga tal på tavlan, till exempel:

10	25	33	47	55
2	76	67	88	12
90	53	75	5	24
40	95	45	98	60
15	77	11	85	23

Gemensam introduktion

Introducera aktiviteten med en gemensam diskussion om några av talen som skrivits på tavlan och deras "hundrakamrater". Hur hittar eleverna paren?

Titta sedan gemensamt var talen finns på hundrarutan och diskutera hur eleverna gör för att snabbt hitta olika tal där. Utgår de från tiotalssiffran eller entalssiffran? Varför? Varför inte? Låt eleverna motivera sina val. Finns det elever som använder ineffektiva strategier? Vad beror det i så fall på? Vad bör göras i undervisningen?

Pararbete och gemensam uppföljning

Förslag på frågor som eleverna först kan diskutera parvis, sedan gemensamt i helklass:

- Var på hundrarutan finns talet 53?
- Är 75 närmare 50 eller 100?
- Vilket jämnt tiotal är närmast 81? 77? 95?
- Finns det hundrakamrater som är enklare att uppfatta och komma ihåg än andra? Vilka är de? Hur motiverar eleverna sina ståndpunkter? Lyft fram "nyckeltal" som 25, 50, 75. Diskutera med eleverna varför de kan kallas nyckeltal.
- Jämför hundrakamrater med tiokamrater. Vilka samband finns?
- Utgå från den gemensamma hundrarutan och låt eleverna berätta om vilka olika strategier de använder för att snabbt hitta olika tal kamrater till hundra.
- Finns det några tal i hundrarutan som inte har en "kamrat"?
- Hur många 100-kamrater finns det? Hur vet vi det?
- Titta på talen på tavlan. Vilka hundrakamrater finns där?

Enskilt arbete

För att befästa arbetet kan eleverna välja ut hundrakamrater och färglägga par så det tydligt syns vilka tal som tillsammans är 100.



Tals helhet och delar

Förslag 4. Vrålapornas fötter

I ett av de höga träden längs Amazonfloden sitter en flock vrålapor. Det är hanar, honor och ungar. De har sammanlagt hundra fötter på trädets grenar. Hur många apor finns det i flocken?

Enskilt arbete och pararbete

Presentera problemet som är öppet och har många tänkbara lösningar. En enda förutsättning måste uppfyllas, den att *hundra fötter ska finnas på trädets grenar*. (Här ses både "händer" och "fötter" som fötter.) Låt eleverna först få fundera enskilt på problemet och sedan diskutera, i par eller mindre grupper, hur de ska lösa det. Varje grupp berättar kort om hur de tänker göra, innan de tar itu med arbetet.

Erbjud eleverna att använda en tanketavla för att synliggöra sambanden mellan olika uttrycksformer. Låt eleverna uttrycka sin idé i olika representationer och därmed både skapa och visa förståelse för matematik. Ge också eleverna erfarenhet av att argumentera för den egna lösningen genom att resonera logiskt.

Gemensam uppföljning

Uppföljningen, då eleverna delger varandra sina erfarenheter och resultat, men också om de höll sig till sin ursprungliga plan eller om de ändrade strategi, är en viktig del i arbetet.

Vilka representationer använde eleverna? Diskutera hur resultaten kan uttryckas med olika representationer. Det är tänkbart att rita trädet och alla aporna, då syns det hur många apor som använder fyra fötter, tre fötter, två fötter, ingen fot men kanske svansen. Hur kan det uttryckas med plockmaterial, i bild, i en tabell, med sifferuttryck, med skriven text ...?

Del 1: Moment B – kollegialt arbete

Diskutera

Reflektera tillsammans kring begreppen kritiska aspekter, matematiska idéer, metoder och modeller.

- Tolkar ni dem på samma sätt? Likheter/skillnader?
- Hur känner ni igen dem hos era elever?
- Finns det någon del av det beskrivna landskapet som ni inte brukar utforska med era elever? Vilka? Varför?

Den ena texten beskriver krokiga vägar genom ett lärandelandskap. Diskutera skillnaden mellan att lära sig hitta i hela landskapet och att bli lotsad kortaste vägen fram till horisonten.

Planera

Välj det förslag i aktiviteten "Tals helhet och delar" som passar bäst till era elever. Diskutera kritiska aspekter, matematiska idéer, metoder eller modeller som kan komma till uttryck i aktiviteten, det vill säga vad ni kan förvänta er att se hos eleverna. Diskutera även hur ni kan anteckna era iakttagelser i anslutning till aktiviteten.

Del 1: Moment C – aktivitet

Genomför aktiviteten på det sätt som ni har planerat.

Del 1: Moment D – gemensam uppföljning

Diskutera

Jämför de anteckningar ni förde i anslutning till aktiviteten.

- Vad fick ni syn på?
- Vad överraskade er? På vilket sätt?

Sammanfatta

- Hur skulle ni utveckla aktiviteten om ni skulle göra om den?
- Vilka delar av lärandelandskapet bör era elever utforska närmast? Hur skulle en lämplig aktivitet då kunna se ut?