

GeoGebra som demonstrationsverktyg

Mats Brunström och Maria Fahlgren, Karlstads universitet

I denna text fokuserar vi på hur lärare kan använda GeoGebra för att dynamiskt visualisera matematiska samband i helklass. Drijvers et al. (2010) har studerat hur olika lärare väljer att orkestrera en helklassundervisning där alla kan följa vad som händer på skärmen. De skiljer på lärarcentrerade och elevcentrerade sätt att demonstrera matematiska samband i helklass. I den lärarcentrerade demonstrationen 'explain-the-screen', är det läraren som förklarar vad som händer på skärmen med fokus på det matematiska innehållet. Denna typ av orkestrering motsvarar en traditionell lärarstyrd genomgång vid tavlan. Skillnaden är att läraren nu har möjlighet att dynamiskt visualisera det matematiska innehållet. En annan lärarcentrerad demonstration som förekom frekvent i studien av Drijvers et al. var 'technical demo', där läraren fokuserade på hur det digitala verktyget fungerar.

Drijvers et al. fann även att lärarna ibland använde det digitala verktyget för att öka interaktionen med eleverna så att det blev en diskussion kring vad som hände på skärmen. I denna elevcentrerade demonstration, 'discuss-the-screen', uppmuntrar läraren eleverna att ställa hypoteser som sedan kan testas. Det kan exempelvis handla om att gissa vad som händer med en funktionsgraf då värdet på en parameter ändras. Den direkta återkopplingen som ett dynamiskt matematikprogram erbjuder kan stimulera denna typ av helklassdiskussioner. Naturligtvis är det många aspekter som blir avgörande för vilken typ av diskussion det blir, inte minst vilka klassrumsnormer som råder. Skolforskningsinstitutet lyfter fram 'utforskande samtal' som eftersträvansvärda vid helklassdiskussioner i matematikundervisningen (Fredriksson et al., 2017). I dessa samtal uppmuntras eleverna till gemensamma matematiska resonemang där de engageras i varandras idéer för att uppnå en gemensam förståelse. Läraren kan stödja denna typ av samtal genom "... att ställa öppna frågor, lyssna noga på och ta tillvara elevernas matematiska idéer, liksom att uppmuntra elevernas engagemang i andra elevers matematiska idéer" (Fredriksson et al., 2017, s. XI).

Även om den elevcentrerade demonstrationen är eftersträvansvärd så ställer den större krav på läraren eftersom den blir mer oförutsägbar, det vill säga det blir svårare att förutse vilka diskussioner som uppstår. Detta kan även innebära att läraren behöver vara beredd på att använda det digitala verktyget på ett sätt som inte var planerat från början.

Applikationer

Ett vanligt begrepp för färdigkonstruerade demonstrationer i GeoGebra är applikationer eller appar. I denna text använder vi i huvudsak begreppet applikationer när vi syftar på färdigkonstruerade demonstrationer.

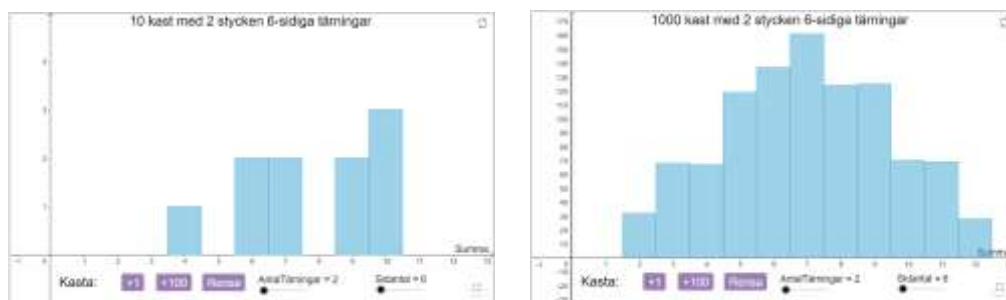
För att visualisera och diskutera matematiska samband i helklass behöver läraren antingen göra en egen konstruktion i GeoGebra eller utnyttja någon av alla de färdigkonstruerade applikationer som andra användare av GeoGebra har delat på www.geogebra.org. Även om det finns många bra applikationer på svenska så kan det vara intressant att använda någon applikation på annat språk. Till exempel finns det många väl genomarbetade applikationer på engelska som kan vara lämpliga att använda. Ibland kan en befintlig demonstration behöva anpassas för att fungera bra i en viss klass. För att en klassrumsdiskussion skall bli elevcentrerad behövs väl genomtänkta frågor. Nedan diskuterar vi lämpliga frågor att ställa utifrån tre olika exempel.

Exempel 1

Det första exemplet, konstruerat av Jonas Hall, handlar om slumpmässiga försök i form av den summa som fås vid kast med tärningar samt hur sannolikhetsfördelningen växer fram då antalet försök ökar. Applikationen är konstruerad så att antalet tärningar och antalet sidor på tärningarna kan varieras. Det är möjligt att göra ett eller 100 kast åt gången. I figur 1 visas exempel på resultat vid 10 respektive 1000 tärningskast. En helklassdiskussion där applikationen används kan förstås orkestreras på många olika sätt, bland annat beroende på elevernas kunskapsnivå och rådande klassrumsnormer. Nedan diskuteras några tänkbara sätt att möjliggöra en elevcentrerad demonstration.

Figur 1.

Dynamisk applikation som simulerar kast med tärningar (se <https://www.geogebra.org/m/xq9kpw25#material/uw9abccq>)



Innan applikationen används, kan läraren engagera eleverna genom att be dem i par/grupp att diskutera vilken summa de tror är vanligast vid kast med två 6-sidiga tärningar. En fördel med de specifika valen (två 6-sidiga tärningar) är att det är något

som de flesta elever troligtvis kan relatera till. Förhoppningsvis blir eleverna motiverade att se vad som händer när vi påbörjar simuleringen. Om resultatet efter 10 kast liknar det i figur 1, blir troligtvis många elever förvånade, vilket i sin tur kan leda till intressanta diskussioner. Här kan det vara lämpligt att låta eleverna diskutera vad de tror att resultatet beror på innan de får diskutera hur resultatet bör se ut efter 100 kast, 200 kast och så vidare. När exempelvis 1000 tärningskast simulerats och diagrammet liknar det till höger i figur 1 kan det vara läge att låta eleverna försöka förklara varför resultatet ser ut som det gör. Ett nästa steg kan vara att öka antalet tärningar och/eller antalet sidor på varje tärning.

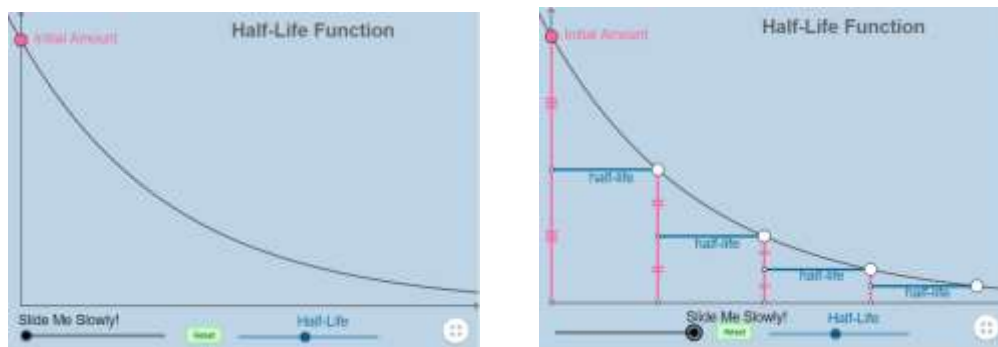
Exempel 2

Nästa exempel, se figur 2, är konstruerat av Tim Brzezinski och är på engelska. Applikationen handlar om halveringstid och exponentiellt avtagande. När glidaren Slide Me Slowly! dras, visas succesivt hur y-värdet halveras och att halveringstiden är densamma vid varje halvering. Det finns även möjlighet att variera halveringstiden, med glidaren Half-Life, samt att ändra startvärdet genom att flytta punkten Initial Amount. I anslutning till applikationen finns en kort video där konstruktören visar hur applikationen är tänkt att användas.

Figur 2.

Dynamisk applikation för illustrering av halveringstid, se

<https://www.geogebra.org/m/GMvvpwrm#material/Ym5NQWJp>



För att få eleverna engagerade kan det vara fördelaktigt att ställa frågor där eleverna får diskutera och komma med förslag som sedan kan testas. Till exempel kan eleverna få diskutera hur grafen ändras om halveringstiden minskar. Eventuellt kan även frågan vad som händer med halveringstiden om startvärdet minskar ställas, då detta kanske inte är självklart för alla elever.

Exempel 3

Den information som synliggörs i en applikation kan spela stor roll för vilken typ av frågor som är lämpliga att ställa. Denna applikation utgår från en exponentiellt avtagande graf för att demonstrera att halveringstiden är konstant. Om läraren istället vill visa hur grafen växer fram är det inte önskvärt att grafen visas från början. Det kan då vara idé att utnyttja möjligheten att anpassa en befintlig applikation. I denna applikation kan grafen döljas och i stället göras möjlig att ta fram via en kryssruta, se figur 3.

Figur 3.

Anpassad version av dynamisk applikation för illustrering av halveringstid, se <https://www.geogebra.org/m/GMvvpwrm#material/Ym5NQWJp>



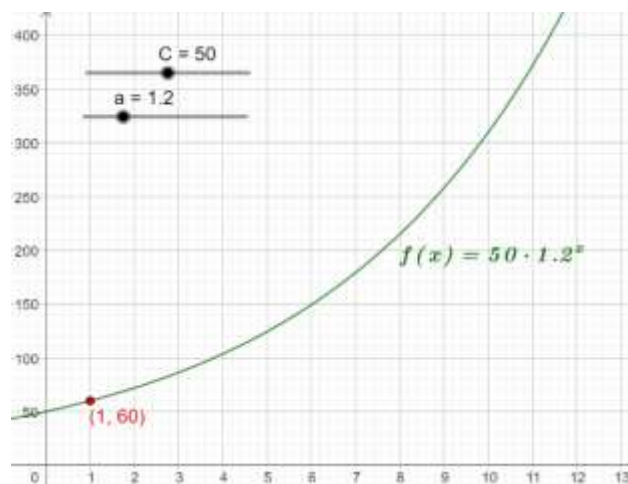
Om grafen är dold kan andra frågor diskuteras. En första fråga att diskutera kan vara hur grafen kommer att se ut. Därefter kan de nya punkterna tas fram stegvis efter att eleverna har fått diskutera var de tror att de nya punkterna hamnar. Om även punkternas koordinater synliggörs, som i figur 3, kan elevernas förslag uttryckas mer exakt med numeriska värden. I den anpassade applikationen är även text översatt till svenska och viss text borttagen.

Exempel 4

För att konstruera de applikationer som har diskuterats ovan krävs viss vana att arbeta med GeoGebra. Vi avslutar med ett exempel på en applikation som är betydligt enklare att konstruera. Även detta exempel handlar om exponentialfunktioner men nu med fokus på den allmänna formeln, $f(x) = C \cdot a^x$. Själva konstruktionen, med glidare för parametrarna C och a , är enkel att göra i GeoGebra. Här kan det även vara lämpligt att utnyttja möjligheten att placera en punkt så att den fäster på grafen. På så vis kan punkten dras längs grafen och dess koordinater kan lätt avläsas, se figur 4.

Figur 4.

Exponentialfunktion med en flyttbar punkt på grafen



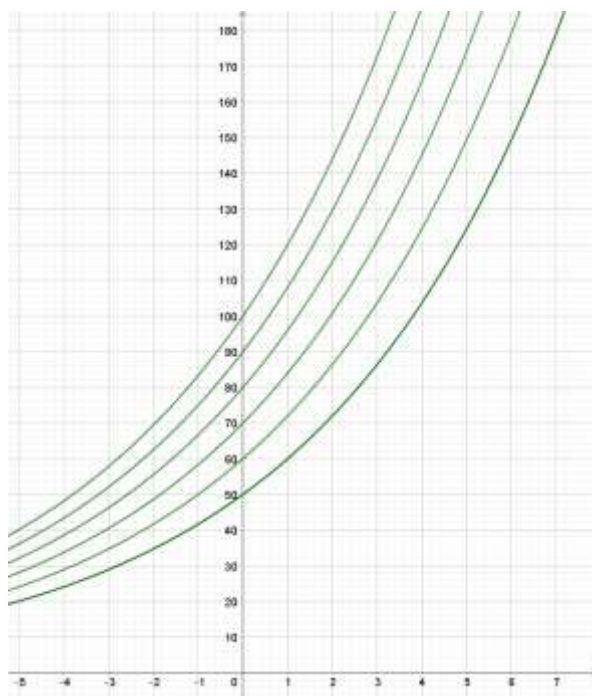
För att verklighetsanknyta demonstrationen och förhoppningsvis engagera eleverna kan läraren exempelvis ställa in glidarna på $C = 50$ och $a = 1,2$, se figur 4, och be eleverna i par/grupp hitta på exempel på vad funktionen skulle kunna representera.

Förhoppningsvis ges ett antal förslag som sedan kan diskuteras och jämföras i helklass och även kopplas till olika punkter på grafen, till exempel vad punkten $(1, 60)$ motsvarar i de olika förslagen.

Därefter kan eleverna få diskutera vad de tror händer med grafen om värdet på C ökar eller minskar respektive vad som händer om värdet på a ökar eller minskar. När läraren sedan drar i respektive glidare får eleverna direkt återkoppling på sina hypoteser. När värdena på en glidare ändras och den nya grafen visas försvinner samtidigt den gamla grafen. Ibland kan det dock vara fördelaktigt att ha flera grafer i samma koordinatsystem. Genom att sätta spår på funktionsgraferna blir det möjligt att behålla de gamla graferna när värdet på en glidare ändras. I figur 5 återges sex olika grafer, där $C = 50, 60, 70, 80, 90$ respektive 100 och $a = 1,2$, i samma koordinatsystem. Figuren visar tydligt hur ett dynamiskt verktyg som GeoGebra gör det möjligt att studera en familj av funktioner, i det här fallet exponentiellt växande funktioner.

Figur 5.

Grafen till funktionen $f(x) = C \cdot 1,2^x$ för några olika värden på C



Olika elever kommer antagligen fokusera på olika saker när undersökningen genomförs, vilket kan öppna upp för intressanta diskussioner utifrån elevernas observationer. Om vi fokuserar på frågan om vad som händer om C ökar finns ett antal tänkbara observationer:

- Grafen förskjuts uppåt
- Grafen dras ut i y -led
- Skärningen med y -axeln ändras
- Värdet på C motsvarar skärningspunktens y -koordinat
- Grafens lutning ökar
- Grafen förskjuts åt vänster

När elever studerar funktionsgrafer kan de fokusera på detaljer i grafen, till exempel vissa funktionsvärden eller specifika punkter på grafen. Funktionsgrafer kan även betraktas mer globalt med fokus på deras egenskaper i stort (Leinhardt et al., 1990). Dessa skillnader kan vi se bland exemplen ovan, där elever som observerar skärningspunkten med y -axeln har ett lokalt fokus medan de som observerar hur

funktionsgrafens form eller placering ändras har ett globalt fokus. Ofta är det viktigt att kunna betrakta en graf både utifrån ett lokalt och ett globalt fokus för att upptäcka en funktions olika egenskaper. Detta kan med fördel tas upp till diskussion i klassen, en diskussion som bygger på elevernas observationer. Som lärare kan det även vara viktigt att fundera på hur en fråga bör formuleras för att främja det ena eller andra tankesättet. En annan fråga som lärare ofta behöver ta ställning till är om det är lämpligt att även fokusera diskussionen på *varför* ett visst matematiskt samband gäller. I exemplet ovan kan frågan *varför* grafen ändras som den gör med fördel diskuteras.

Innan exponentiellt avtagande demonstreras kan eleverna få diskutera vad de tror händer om $a = 1$. Även här kan en diskussion kring *varför* grafen ser ut som den gör vara givande. När sedan exponentiellt avtagande funktioner behandlas är en idé att be eleverna diskutera sig fram till *en skiss* av hur de tror en graf där exempelvis $C = 80$ och $a = 0,5$ kan se ut. När de ska rita en skiss av grafen tvingas de tänka efter lite mer än om de bara ska uttrycka sina tankar muntligt. För att få eleverna att reflektera ytterligare kan de få formulera en skriftlig förklaring till *varför* skissen ser ut som den gör. De olika skisserna kan sedan ligga till grund för en helklassdiskussion innan läraren ställer in glidarna så att den efterfrågade grafen visas. Även här är det troligtvis läge att diskutera *varför* grafen ser ut som den gör.

Elevcentrerade diskussioner

I exemplen ovan gavs ett antal förslag på hur demonstrationer med GeoGebra kan utvecklas till mer elevcentrerade diskussioner. Förslagen har handlat om att:

- låta eleverna diskutera i par eller små grupper innan deras förslag ligger till grund för en helklassdiskussion. Förutom att fler elever blir aktiva vid gruppdiskussioner, kan det vara en trygghet för eleverna att det är gruppens förslag som diskuteras.
- fråga efter verklighetsbaserade exempel på vad en viss graf kan illustrera. Detta är ett exempel på en *öppen fråga* där eleverna troligtvis kommer ge helt olika svar. Det kan i sin tur skapa förutsättningar för en diskussion med utgångspunkt i elevernas förslag. Frågetypen där elever uppmanas att ge ett eller flera exempel som uppfyller vissa villkor rekommenderas som ett sätt att öka elevers engagemang och kreativitet i matematikundervisningen (Watson & Mason, 2005). Användningen av GeoGebra kan ytterligare stärka denna undervisningsstrategi.
- be eleverna gissa vad som kommer att hända på skärmen innan GeoGebra används för att visa vad som händer. På så vis får eleverna direkt återkoppling på sina hypoteser. Denna uppgiftstyp rekommenderas ofta för att stimulera matematiska resonemang (Laborde, 2002).
- föra en diskussion utifrån *elevernas tolkningar* av vad som händer på skärmen. Det är mycket troligt att eleverna kommer fokusera på olika saker. När det handlar om

att tolka funktionsgrafer kommer troligtvis vissa elever ha ett mer lokalt fokus, medan andra har ett globalt fokus.

- be eleverna komma med förslag på *varför* vissa saker händer på skärmen. Om undersökningsresultat och gissningar inte stämmer överens är det extra viktigt att försöka förklara varför (Laborde, 2002). Enligt Arcavi och Hadas (2000) kan oväntade undersökningsresultat leda till att motivationen att söka förklaringar ökar och därmed kan även möjligheterna för elever att reda ut eventuella missuppfattningar öka.
- Reflektera över eventuella behov av anpassning, vid användning av befintliga applikationer, för att kunna formulera mer öppna frågor. Det kan exempelvis handla om att dölja delar av applikationen för att eleverna själva ska få möjlighet att reflektera och ställa hypoteser.

I denna del har vi gett exempel på hur demonstrationer kan göras mer elevcentrerade. Motsvarande exempel skulle även kunna användas som elevaktiviteter där eleverna arbetar med GeoGebra.

Referenser

- Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(1), 25–45.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. C. & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234.
- Fredriksson, K., Envall, I., Bergman, E., Fundell, S., Norén, E. & Samuelsson, J. (2017). *Klassrumsdialog i matematikundervisningen: matematiska samtal i helklass i grundskolan*. Skolforskningsinstitutet.
- Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283–317.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64.
- Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Routledge.