

Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

Maria Fahlgren och Mats Brunström, Karlstads universitet

I denna text kommer vi att fokusera på elevers användande av dynamiska matematikprogram. Förutom att själv kunna använda GeoGebra, behöver läraren kunna avgöra när det är lämpligt att använda GeoGebra samt vilka eventuella hinder elever kan uppleva då de använder programmet. Ett sätt att minska risken för att elever skall fastna i tekniska problem är att låta dem arbeta med färdigkonstruerade demonstrationer, kallade applikationer eller appar. Idag erbjuder många digitala läromedel denna typ av interaktiva komponenter. Det finns även en uppsjö av färdiga GeoGebra-applikationer att tillgå, via exempelvis [geogebra.org](https://www.geogebra.org), som lärare kan använda men också anpassa till sin egen undervisning. Naturligtvis är det även möjligt för lärare att själva konstruera applikationer som de sedan kan dela med sina elever.

En av styrkorna med ett dynamiskt matematikprogram är möjligheten till interaktion där den visuella återkopplingen gör det möjligt för elever att snabbt testa olika idéer. Dock visar forskning att det ibland kan vara svårt för elever att tolka återkopplingen på ett konstruktivt sätt. För att lärande skall kunna ske behöver eleverna kunna tolka den visuella återkopplingen och översätta den till matematisk kunskap (Joubert, 2017). De behöver, som Noss et al. (1997) uttrycker det, mentalt kunna gå från det empiriska/visuella till det systematiska/matematiska. Det finns en identifierad risk att elever, medan de arbetar med ett dynamiskt matematikprogram, endast kommer att förhålla sig till de empiriska/visuella objekt som erhålls på skärmen utan att reflektera över den bakomliggande matematiken. Därför är det viktigt, vid utformningen av elevaktiviteter, att tänka på hur uppgifter kan formuleras så att de uppmuntrar eleverna att gå längre än att bara rapportera vad de har sett på skärmen (Joubert, 2017). Ett sätt att göra detta på är att be eleverna om förklaringar till de observationer de gör.

Vi kommer i denna del att fokusera på viktiga aspekter att beakta i samband med användningen av färdigkonstruerade applikationer. I jämförelse med en statisk bild är en rörlig bild eller en interaktiv komponent mer komplex. Därför blir det viktigt att reflektera över vilka instruktioner eleverna behöver få och hur frågorna skall formuleras för att rikta deras uppmärksamhet mot syftet med applikationen. Vi har valt att kalla en färdigkonstruerad GeoGebra-applikation med tillhörande text i form av instruktioner och frågor till elever för ett *dynamiskt arbetsblad*.

Dynamiska arbetsblad för olika syften

Undersökande aktivitet

Det finns naturligtvis olika syften med ett dynamiskt arbetsblad beroende på vilket/vilka förmågor som är i fokus. Ett vanligt syfte är att bjuda in elever till ett undersökande arbetssätt där de ges möjlighet att upptäcka mönster och generella samband. De möjligheter till undersökande arbetssätt som erbjuds med GeoGebra kan i sin tur locka elever till matematiska resonemang, inte minst när det gäller att formulera och undersöka egna hypoteser. Forskning visar att det kan vara fördelaktigt att låta elever arbeta parvis med undersökande aktiviteter i matematik (Arzarello & Robutti, 2010). Det är då lämpligt att de arbetar tillsammans med en dator så att de kan resonera och kommunicera utifrån resultat som visas på en gemensam skärm.

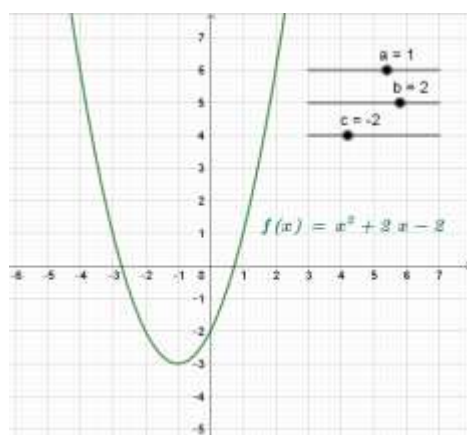
Nedan ges ett exempel där eleverna uppmuntras att undersöka och formulera slutsatser. Utifrån exemplet kommer vi att jämföra olika uppgiftsformuleringar och diskutera deras potential att uppmuntra elever till reflektion över den bakomliggande matematiken.

I detta exempel vill vi att eleverna skall upptäcka att parametern c i den allmänna andragsgradsfunktionen, $f(x) = ax^2 + bx + c$, motsvarar grafens skärning med y -axeln, se figur 1. En tänkbar elevinstruktion skulle kunna vara:

- Undersök, genom att dra glidare c hur värdet på c påverkar grafen. Formulera en slutsats.
- Ställ in nya värden på glidarna a och b och undersök om din/er slutsats fortfarande verkar gälla. Om inte, formulera en ny slutsats.

Figur 1.

Grafisk och algebraisk representation av andragsgradsfunktion



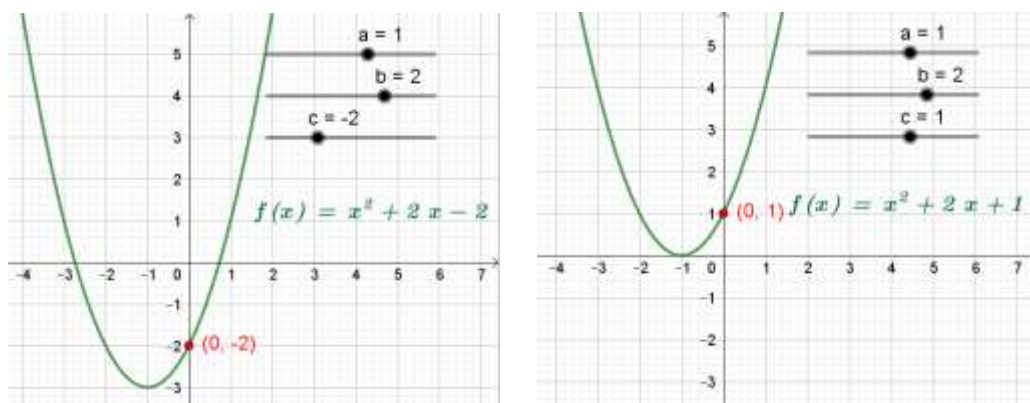
Många elever kommer troligtvis observera att grafen rör sig upp och ned och formulerar detta som sin slutsats. För att få eleverna att observera skärningen med y-axeln skulle instruktionen ovan kunna vara mer preciserad så att elevernas fokus blir mer lokalt i stället för globalt. Till exempel skulle den första instruktionen istället kunna vara:

- Undersök, genom att dra glidare c hur värdet på c kan avläsas i koordinatsystemet. Formulera en slutsats.

Ett annat sätt att rikta elevers uppmärksamhet på grafens skärning med y-axeln är att utnyttja den möjlighet GeoGebra ger att ta fram skärningspunkter, se figur 2.

Figur 2.

Andragsgradsfunktioner där grafens skärningspunkt med y-axeln är inlagd



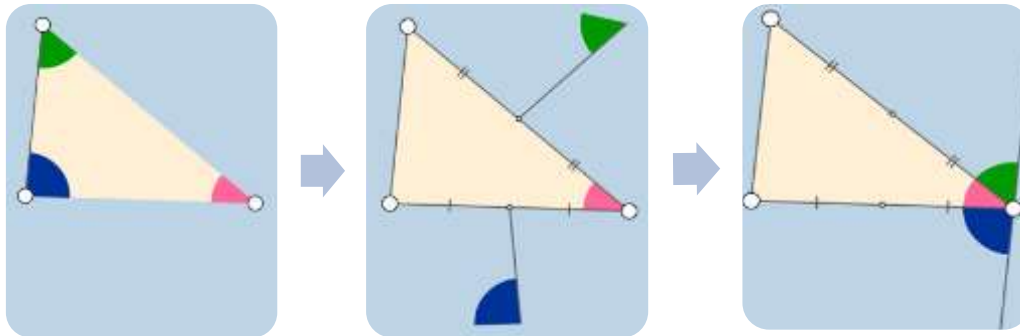
Även om elever upptäcker och kan beskriva att c motsvarar skärningen med y-axeln, har de flesta troligtvis inte reflekterat över den bakomliggande matematiken. Ett sätt att uppmuntra elever till detta, är att be om en förklaring till *varför* värdet på c kan avläsas på detta sätt. Naturligtvis är det viktigt att endast be om förklaringar när dessa ligger inom räckhåll för eleverna. Om det istället handlat om hur parameter b påverkar grafens utseende hade det troligtvis inte varit lämpligt att be om en förklaring.

Dynamisk illustration

Ett annat syfte med ett dynamiskt arbetsblad kan vara att illustrera ett matematiskt samband eller en definition. Här är elevernas interaktion med applikationen ofta begränsad. Det handlar mer om att tolka en rörlig bild för att kunna formulera en slutsats. Figuren 3 och 4 visar exempel hämtade från [geogebra.org](https://www.geogebra.org), konstruerade av Tim Brzezinski som gjort många väl genomtänkta dynamiska arbetsblad med GeoGebra. I figur 3 visas ett exempel där elever uppmanas att beskriva vilket matematiskt samband som illustreras. Eleverna har här möjlighet att dra i triangelns hörn för att övertyga sig om att sambandet verkar gälla för alla trianglar.

Figur 3.

Dynamisk illustration av vinkelsumman i en triangel, se <https://www.geogebra.org/m/JVc49sEa>



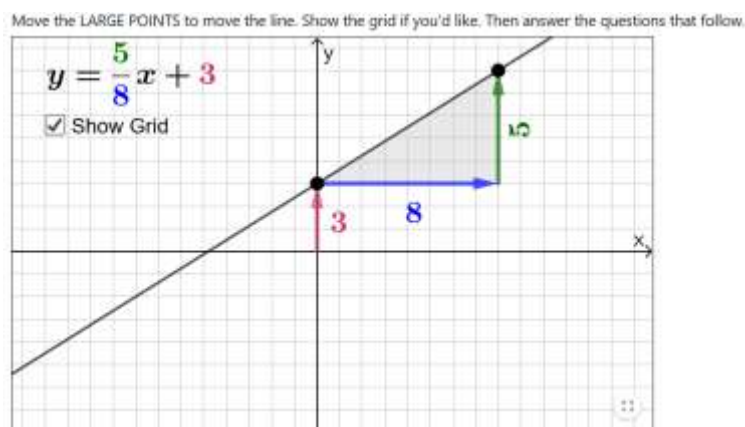
I exemplet i figur 4 illustreras kopplingen mellan grafisk och algebraisk representation av räta linjer. Förutom instruktionen ovanför applikationen finns två frågor under applikationen:

1. Hur kan du bestämma linjens lutning med hjälp av ekvationen? Förklara.
2. Hur kan du bestämma linjens skärningspunkt med y-axeln med hjälp av ekvationen? Förklara.

Figur 4.

Dynamisk illustration av räta linjens ekvation, se

<https://www.geogebra.org/m/GMvvpwrm#material/vs5wy4qw>



Färdighetsträning

Dynamiska arbetsblad kan även användas för färdighetsträning. I figur 5 visas en applikation, även den konstruerad av Tim Brzezinski, med följande instruktioner, omformulerade i den svenska översättningen.:

1. Studera ekvationen i övre vänstra hörnet av koordinatsystemet.
2. Flytta de två stora punkterna så att linjen överensstämmer med ekvationen.
3. Klicka på "Check Answer" så får du reda på om ditt svar är korrekt eller inte. Om ditt svar inte är korrekt, prova igen.
4. När du fått rätt svar, klicka på "Generate New Line".

Figur 5.

Färdighetsträning av räta linjens ekvation, se

<https://www.geogebra.org/m/GMvvpwrm#material/janxjF4N>



Vi har nu utifrån exempel diskuterat tre olika syften med ett dynamiskt arbetsblad: undersökande aktivitet, dynamisk illustration samt färdighetsträning. Vi kommer nedan att diskutera aspekter att reflektera kring vid konstruktion av dynamiska arbetsblad.

Konstruktion av dynamiska arbetsblad

Med utgångspunkt i designprinciper för multimedialt lärande har Hohenwarter, skaparen av GeoGebra, och Preiner utvecklat ett antal riktlinjer vid design av dynamiska arbetsblad (Hohenwarter & Preiner, 2008). Det handlar om riktlinjer för a) layouten, b) själva GeoGebra-applikationen samt c) den tillhörande texten. Utifrån dessa riktlinjer samt annan relevant forskning (Joubert, 2017; Sinclair, 2003; Trocki & Hollebrands, 2018) sammanfattar vi nedan ett antal punkter att beakta vid konstruktion av dynamiska arbetsblad.

a) Vad gäller *layouten*, handlar det om att den behöver vara gynnsam:

- hela arbetsbladet bör synas på skärmen samtidigt, utan att man behöver scrolla. Om detta inte är möjligt kan det vara bättre att skapa flera arbetsblad. Vid ett större antal arbetsblad är det numera möjligt att organisera dessa genom att skapa en så kallad GeoGebra-bok.
- ha högst 3–4 frågor i ett och samma arbetsblad.

b) Vid skapandet av *GeoGebra-applikationer* är det viktigt att:

- reflektera kring vilken frihet eleverna skall ges vad gäller interaktion med applikationen. Till exempel kan det handla om vilka objekt som skall vara möjliga att variera samt inom vilka gränser, exempelvis inställning på glidare.
- använda avvikande färger eller större storlek för att tydliggöra vilka objekt som går att variera. Exempel på detta ser vi i figurerna 3–5 där de flyttbara punkterna har gjorts extra stora. Lås objekt, för att undvika att elever av misstag flyttar på objekt såsom en textruta eller en glidare, vilket kan leda till onödig distraktion.
- rikta elevers uppmärksamhet mot det matematiska samband som är i fokus. Detta kan göras genom att markera centrala objekt på något sätt, till exempel med avvikande färg. I den undersökande applikationen ovan, figur 2, placerades en röd punkt på grafen för att rikta elevernas uppmärksamhet mot skärningen med y-axeln. I den dynamiska applikationen i figur 4 används olika färger för att tydliggöra kopplingen mellan ekvation och linje.
- placera den dynamiska texten i nära anslutning till det dynamiska objektet. I figur 1 och 2 är funktionsformeln exempel på en dynamisk text som placerats intill motsvarande graf. För att ytterligare tydliggöra kopplingen har samma färg använts.
- undvika information/objekt som inte är nödvändiga då detta kan leda till onödig kognitiv belastning för eleven. Till exempel kan det handla om att dölja algebrafönstret, ta bort onödiga beteckningar eller namn på objekt eller att reducera antalet tillgängliga verktyg. Det finns även möjlighet att tillfälligt dölja information bakom ”knappar”. På så vis kan eleven succesivt ges nödvändig information.
- undvika statisk text, såsom instruktioner och frågor, i själva applikationen då detta lätt gör den onödigt plottrig. Istället bör texten placeras antingen ovanför eller under applikationen. Återigen handlar det om att undvika onödig kognitiv belastningen.

c) Det finns mycket att reflektera kring även när det gäller *instruktioner och uppgiftsformuleringar*. Här handlar det om att:

- formulera frågor och instruktioner som är korta och tydliga samt gärna med ett personligt tilltal, exempelvis genom att använda ordet du eller ni om det handlar om par- eller grupparbete.

- reflektera kring hur styrande instruktionerna bör vara och hur preciserad en uppmaning/fråga skall vara. Flera studier visar att det ofta finns behov av att precisera frågor som ställs till elever. Ett exempel på en sådan precisering gavs i den undersökande aktiviteten ovan där instruktionen omformulerades för att rikta elevers uppmärksamhet mot grafens skärning med y-axeln.
- tydliggöra kopplingen mellan texten och applikationen, exempelvis genom att färgmarkera ord som hör ihop med specifika objekt i applikationen.

Även om flera av riktlinjerna ovan kan tyckas självklara framhåller Hohenwarter och Preiner att de är viktiga att reflektera över, både när lärare skapar egna dynamiska arbetsblad och när de väljer bland befintliga färdigkonstruerade applikationer eller arbetsblad. Ofta kan det handla om att skapa ett dynamiskt arbetsblad utifrån en befintlig GeoGebra-applikation.

Referenser

Arzarello, F. & Robutti, O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. *ZDM*, 42(7), 715–731.

Hohenwarter, M. & Preiner, J. (2008). Design guidelines for dynamic mathematics worksheets. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 6(2), 311–323.

Joubert, M. (2017). Revisiting theory for the design of tasks: special considerations for digital environments. I A. Leung & A. Baccaglioni-Frank (red.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks* (s. 17–40). Springer.

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 203–233.

Sinclair, M. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 289–317.

Trocki, A. & Hollebrands, K. (2018). The development of a framework for assessing dynamic geometry task quality. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 4(2–3), 110–138.