

Elevaktiviteter med GeoGebra-konstruktioner

Mats Brunström och Maria Fahlgren, Karlstads universitet

I denna text fokuserar vi på aktiviteter där eleverna själva gör de GeoGebra-konstruktioner som behövs. Beroende på hur stor erfarenhet eleverna har av GeoGebra kan de behöva mer eller mindre stöd i form av instruktioner. Jämfört med att låta eleverna arbeta med färdigkonstruerade applikationer tar det förstås mer tid i anspråk när de ska göra egna konstruktioner. Lärare behöver väga den tid det beräknas ta för elever att själva göra de konstruktioner som behövs mot möjligheten till matematiskt lärande både på kort och lång sikt.

Det finns flera fördelar med att låta eleverna göra egna konstruktioner i GeoGebra. Förutom att de lär sig att hantera GeoGebra så kan ibland själva konstruktionen bygga på och stötta den matematiska förståelsen (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Till exempel behövs kunskap om definitionen av en rektangel för att konstruera en rektangel som förblir en rektangel även om vi drar i något av dess hörn. För att rektangeln skall bli ”robust” måste konstruktionen bygga på att samtliga vinklar är räta, vilket innebär att verktyget för vinkelräta linjer behöver utnyttjas. Den färdiga konstruktionen kan sedan enkelt testas genom att dra i något av rektangelns hörn. På det här sättet ger programmet en direkt återkoppling och det blir uppenbart om konstruktionen bygger mer på visuell igenkänning än matematisk förståelse.

En annan fördel med att göra egna konstruktioner är att det kan hjälpa till att synliggöra matematiska missförstånd bland elever (Drijvers & Gravemeijer, 2005). Nedan följer ett exempel där det blir tydligt att det inte är tekniska problem som leder till att eleverna kör fast. Istället är det den bakomliggande matematiken, i form av kopplingen mellan ordnade par och punkter i ett koordinatsystem, som eleverna inte verkar ha förstått. I episoden nedan får eleverna, efter att ha beräknat höjden på en solros efter en vecka, följande instruktion:

Lägg även in punkten som visar solrosens höjd efter 1 vecka, enligt beräkningen ovan, genom att skriva koordinaterna i inmatningsfältet.

Ett elevpar börjar med att mata in 65 cm och får då återkopplingen **ogiltig indata** från GeoGebra. De provar då istället att mata in 65, vilket ger talet $a=65$ i algebrafönstret. Denna återkoppling från GeoGebra gör att de läser instruktionerna ytterligare en gång:

Elev 1: Genom att skriva koordinaterna. [läser instruktionen högt med betoning på slutet av ordet "koordinaterna"]

Elev 2: Ska det vara flera?

Elev 1: Men det är bara en.

Elev 2: Är det?

Elev 1: Ja, det är bara en höjd.

Eleverna verkar ignorera värdet på x genom att bara fokusera på solrosens höjd, det vill säga värdet på y . Efter ytterligare diskussioner reder eleverna ut missförståndet och matar in (1, 65) i inmatningsfältet. I detta exempel ser vi hur återkopplingen **ogiltig indata** tydliggör ett missförstånd som eleverna sedan kan reda ut.

Detta var exempel på möjligheter som skapas med att låta elever göra egna konstruktioner men det finns förstås även nackdelar. Risken är större att eleverna stöter på oväntade problem som inte har med själva matematiken att göra. Det kan handla om problem med syntax såsom att punkt måste användas som decimalkomma i GeoGebra. Om konstruktionerna är för komplexa är risken stor att fokus blir på tekniken snarare än på matematiken. När lärare beslutar om det är lämpligt att låta elever arbeta med ett färdigt dynamiskt arbetsblad eller en elevaktivitet där de även gör egna konstruktioner är det viktigt att väga möjligheter mot risker.

Konstruktion av elevaktiviteter

Nedan diskuteras flera olika aspekter att reflektera kring vid utformandet av elevaktiviteter där elever själva gör de konstruktioner som behövs. Vi har valt att kalla dessa aspekter för *didaktiska variabler*. Forskare föreslår didaktiska variabler som ett verktyg vid utformandet av elevaktiviteter (Ruthven et al., 2009). Didaktiska variabler handlar om viktiga designval vilka kan påverka elevers lärande på olika sätt. Vi kommer i det följande att diskutera några didaktiska variabler som kan vara värda att reflektera över vid konstruktion eller anpassning av elevaktiviteter.

Behov av GeoGebra-instruktioner

Beroende på i vilken utsträckning eleverna är bekanta med GeoGebra sedan tidigare kan en elevaktivitet behöva innehålla mer eller mindre detaljerade instruktioner för hur själva programmet fungerar. Figur 1 visar ett utdrag ur elevaktiviteten *Räta linjens ekvation*. I detta exempel utgår vi från att eleverna inte tidigare har arbetat med GeoGebra varför aktiviteten inleds med en rad utförliga instruktioner. Syftet är här att eleverna, förutom att lära sig matematik, skall utveckla förtrogenhet med att använda programmet. Exempelvis lär de sig att det automatiskt skapas glidare då en formel matas in i Algebrafönstret, hur inställningen av en glidares gränser och steglängd görs och hur värdet på glidaren ändras samt hur tal i decimalform skrivs i GeoGebra.

Figur 1.

Utdrag ur elevaktiviteten *Räta linjens ekvation*

 Mata in $y = kx + m$ i inmatningsfältet.

Nu har det även skapats två så kallade glidare, **k** och **m**, i Algebrafönstret.

 Ändra inställningarna på glidarna genom att:

- Klicka på  (till höger om respektive glidare) och välj "Inställningar"
- I det nya fönstret till höger, välj "Glidare"
- Ställ in båda glidarna på följande sätt:

OBS! Som decimalkomma används punkt!

- Stäng det nya fönstret genom att klicka på  (i fönstrets övre högra hörn).

k

-5

m

-5

Steglängd

0.5

 "Dra" in linjens ekvation från Algebrafönstret till Ritområdet.

 Ställ in glidare **m** på värdet 0 (genom att dra i punkten på glidaren).

1. Undersök, genom att dra glidare **k**, hur värdet på **k** påverkar linjen. Testa även negativa värden på **k**. Beskriv med egna ord:

Naturligtvis är det viktigt att anpassa instruktionerna efter aktuell elevgrupp. Då lärare ska använda en befintlig elevaktivitet kan instruktioner behöva läggas till eller tas bort. En viktig didaktisk variabel att reflektera kring är alltså hur utförliga GeoGebra-instruktionerna behöver vara.

Lösning med eller utan digitalt verktyg

Att lösa en uppgift med eller utan ett digitalt verktyg innebär oftast olika Lösningstrategier, vilka i sin tur erbjuder olika möjligheter till lärande. Om eleverna till exempel ska konstruera en funktionsgraf så krävs bara några knapptryckningar för att göra detta i GeoGebra. Om vi jämför detta med vad som krävs för att göra detsamma utan ett digitalt verktyg så inser vi att det handlar om två helt olika strategier, vilka erbjuder olika möjligheter till lärande. Här är det viktigt att som lärare vara klar över syftet med uppgiften. Om till exempel syftet är att eleverna skall upptäcka egenskaper hos funktioner kan det vara bra om de kan använda GeoGebra för att snabbt konstruera ett stort antal funktioner som kan jämföras. Om däremot syftet är att ge ökad förståelse för att en graf består av punkter som alla uppfyller ett givet villkor kan det vara lärorikt att konstruera grafen för hand med hjälp av en värdetabell, även om detta också kan göras med GeoGebra.

Ett exempel på en uppgift där Lösningstrategierna är skilda men där själva konstruktionen i GeoGebra kan bidra till ökat lärande är konstruktionen av en rektangel, som diskuterats tidigare. Det är möjligt att rita en rektangel för hand med papper och penna utan att vara medveten om dess egenskaper, det räcker att känna igen dess form. För att konstruera en robust rektangel i GeoGebra krävs däremot djupare kunskaper. I

samband med detta kan skillnaden mellan definition och egenskap diskuteras. I det här fallet är egenskapen att sidorna är parvis parallella en följd, implikation, av definitionen att samtliga vinklar är räta. För att det skall bli en robust konstruktion måste den bygga på definitionen, det räcker inte med att det är parvis parallella sidor. En diskussion kring dessa skillnader kan passa särskilt bra då begreppen definition och implikation behandlas.

Vi har nu sett exempel på hur en och samma uppgift kan erbjuda olika möjligheter till lärande beroende på om den löses med eller utan digitalt verktyg. Många gånger kan det vara värdefullt att genomföra samma uppgift både med och utan ett digitalt verktyg. Forskning visar att det kan vara värdefullt för elever att jämföra olika sätt att lösa uppgifter för att få en ökad förståelse för den aktuella matematiken (Kilpatrick et al., 2001). Det blir viktigt för lärare att avgöra om en uppgift skall lösas med digitalt verktyg, för hand med papper och penna eller både och. Detta är ännu ett exempel på en didaktisk variabel att reflektera över. Många gånger kan detta val hänga ihop med vilken representationsform som är lämpligast att använda.

Olika representationsformer

Att kunna använda och se samband mellan olika representationsformer är viktigt för att utveckla en god begreppsförståelse i matematik (Kilpatrick et al., 2001). Dynamiska matematikprogram ger nya möjligheter att tydliggöra kopplingen mellan olika representationsformer såsom algebraisk och grafisk. I elevaktiviteten i figur 2 ska eleverna först lösa ekvationen algebraiskt, både för hand och med GeoGebras CAS-verktyg. Syftet med att låta eleverna kontrollera sitt svar med CAS-verktyget är dels att de ska lära sig lösa ekvationer med hjälp av CAS och dels för att säkerställa att de har korrekt svar när de går vidare till nästa uppgift. I denna uppgift ska eleverna reflektera över hur samma ekvation kan lösas med grafisk metod.

Figur 2.

Utdrag ur elevaktivitet som handlar om andragradsekvationer

1. a) Lös andragradsekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$ algebraiskt (för hand).

Nu ska vi använda GeoGebra för att lösa samma ekvation på två olika sätt, dels med CAS-verktyget och dels grafiskt.

Lös ekvationen med hjälp av CAS

 Klicka på de tre vågräta strecken i övre högra hörnet: , välj "Visa" och markera "CAS".

Nu visas samtidigt tre olika vyer i GeoGebra: CAS, Algebrafönstret samt Ritområdet.

 Kontrollera ditt svar med CAS-verktyget genom att:

- o Mata in $x^2 - 4x + 3 = 0$ i CAS-fönstrets inmatningsfält och klicka på .

Lös ekvationen grafiskt

 Mata in funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 3$ i Algebrafönstrets inmatningsfält.

b) Lösningarna till motsvarande andragradsekvation, dvs. $x^2 - 4x + 3 = 0$, kan avläsas i koordinatsystemet. *Hur?*

I de efterföljande uppgifterna i aktiviteten i figur 2 uppmuntras eleverna att göra kopplingar mellan grafiska och algebraiska lösningar av andragradsekvationer. Valet av representationsform blir därmed en viktig didaktisk variabel.

Matematiska förklaringar

Ett sätt att uppmuntra elever att gå från visuella observationer till matematisk förståelse kan vara att be dem ge en matematisk förklaring till sina observationer. Dock är det viktigt att det verkligen finns något att förklara då förklaringar efterfrågas och att eleverna har de förkunskaper som krävs för att kunna ge en förklaring. Ibland kan det därför räcka med att be dem beskriva vad som sker på skärmen. Att avgöra när det är lämpligt att be elever att förklara är ytterligare en didaktisk variabel.

Olika typer av uppgifter

Några uppgiftstyper som lämpar sig väl för den typ av elevaktiviteter som behandlas i denna text diskuteras nedan.

Undersökande uppgifter. Vi har tidigare visat exempel på uppgifter där elever uppmuntras att använda GeoGebra för att undersöka och upptäcka något matematiskt samband. I figur 1 ges ett exempel där eleverna ska använda glidaren för att undersöka hur grafen till funktionen $f(x) = kx + m$ påverkas av värdet på parametern k , då värdet på parametern m är noll, och beskriva detta med egna ord. I den efterkommande

uppgiften ska eleverna testa sin hypotes för andra värden på parametern m och vid behov revidera hypotesen. Därefter kan det bli aktuellt att även be om en förklaring till varför värdet på k påverkar grafen på detta sätt. Med andra ord blir den didaktiska variabeln om vi ska be om en förklaring eller inte aktuell.

Gissa och testa. I exemplet på en undersökande uppgift ovan uppmanas eleverna att ställa en hypotes *efter* att de gjort en undersökning, som de därefter får testa och eventuellt även förklara. Ett alternativ är att låta eleverna först formulera en hypotes, genomtänkt gissning, som de därefter får testa med GeoGebra. På detta sätt uppmanas eleverna att sätta sig in i den matematiska situationen innan de börjar undersöka med GeoGebra. Forskning visar att det är viktigt att eleverna formulerar sina hypoteser explicit, gärna skriftligt (t.ex. Arcavi & Hadas, 2000). Exemplet ovan skulle kunna göras om till denna typ av uppgift genom att be eleverna att först reflektera över och formulera hur de tror att parametern k påverkar grafen. Därefter får de använda GeoGebra för att testa sin gissning.

Konstruera exempel. Exempel spelar en central roll i matematikundervisningen. Oftast presenteras de av lärare eller lärobok som demonstration av begrepp och procedurer. Dock visar forskning att elevers engagemang och kreativitet kan öka om de får konstruera egna exempel utifrån givna villkor (Watson & Mason, 2005). Det kan exempelvis handla om att konstruera ett eller flera exempel på en funktion som har vissa egenskaper. Tillgången till dynamiska matematikprogram kan gynna denna uppgiftstyp genom att elever enkelt kan testa och eventuellt justera sina förslag. Vi illustrerar detta genom att jämföra två uppgifter som behandlar samma matematiska område.

Uppgift 1: Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

Uppgift 2: Ge förslag på två olika trigonometriska funktioner som båda har värdemängden $-2 \leq y \leq 4$. Testa era förslag i *GeoGebra* innan ni svarar på uppgiften.

Troligtvis kommer några elever inse att de kan lösa uppgift 1 genom att utnyttja att amplituden är 3 och att det är en förskjutning i y -led, men de flesta kommer antagligen att skapa funktionsgrafen i GeoGebra för att lösa uppgiften, om detta är tillåtet.

Till skillnad från uppgift 1, är uppgift 2 en öppen uppgift med oändligt många korrekta svar. Här finns ingen funktion att utgå ifrån vilket gör att det ställs större krav på kreativitet och matematisk förståelse för att lösa uppgiften. En uppgift som denna lämpar sig särskilt bra som par- eller gruppuppgift eftersom den kan ge stora möjligheter till givande matematiska diskussioner. Möjligheten och uppmaningen att testa svaren i GeoGebra gör att ett felaktigt förslag som ändå är på rätt väg kan ge upphov till givande diskussioner kring hur funktionen kan ändras för att få den önskade värdemängden.

Många anger troligtvis $f(x) = 3 \sin(x) + 1$ som sin första funktion. När eleverna ska ta fram ett andra exempel på funktion behöver de reflektera kring vilka parametrar som är avgörande för att få den önskade värdemängden och om det finns ytterligare parametrar som kan ändras utan att värdemängden påverkas.

Naturligtvis finns det flera lämpliga uppgiftstyper som kan vara aktuella. De ovan nämnda är exempel på uppgiftstyper som kan användas för att uppmuntra eleverna att ställa hypoteser som de därefter får testa och eventuellt även förklara. Uppgiftstyperna bygger på att eleverna kan tolka den återkoppling som GeoGebra ger, något som ibland kan vara en utmaning. Det finns studier som visar att elever i större utsträckning kan tolka återkopplingen från GeoGebra om de har formulerat egna hypoteser som de testat (Olsson, 2018).

Valet av uppgiftstyp kan ses som en didaktisk variabel. Exempelvis är det viktigt att reflektera kring om eleverna ska ställa en hypotes *efter* att de gjort en undersökning eller om de *först* ska formulera en hypotes som de därefter får testa med GeoGebra.

Den typ av elevaktiviteter som beskrivs i denna del tar lite längre tid att genomföra och en relevant fråga blir naturligtvis om det är värt att lägga så mycket tid på en aktivitet. Här vill vi lyfta fram möjligheten att arbeta med förmågorna. Oftast ger arbetet med en aktivitet elever möjlighet att utveckla flera förmågor. När det gäller att bestämma sig för om en aktivitet ska användas eller inte kan det därför vara viktigt att reflektera kring vilka förmågor som kan aktiveras.

Matematiska förmågor

Vid ett flertal tillfällen har vi, både i denna del och tidigare delar, berört hur användandet av GeoGebra kan främja elevers lärande på olika sätt. Som avslutning på modulen diskuteras kortfattat användandet av GeoGebra kopplat till var och en av de matematiska förmågor som lyfts fram i ämnesplanen.

Resonemangsförmågan. Vi har i texterna vid ett flertal tillfällen poängterat att GeoGebra gör det möjligt för elever att undersöka och själva upptäcka många av de matematiska samband som ingår i gymnasiets olika kurser. När elever arbetar med undersökande aktiviteter kan de uppmanas att förutsäga, hitta mönster, ställa hypoteser, motivera, generalisera, förklara och eventuellt även bevisa. Det kan med andra ord skapas förutsättningar att utveckla elevers resonemangsförmåga.

Kommunikationsförmågan. Arbeta med GeoGebra kan även skapa goda förutsättningar för en matematiskt grundad kommunikation. Det kan exempelvis handla om att muntligt eller skriftligt beskriva matematiska samband som synliggörs med hjälp av GeoGebra eller att jämföra och diskutera olika tolkningar av vad som händer på skärmen. Samtliga

uppgiftstyper som nämns i avsnittet ovan lämpar sig väl för att genomföras i par eller mindre grupper och ger goda möjligheter till matematisk kommunikation. Exempelvis är chanserna stora att eleverna kommer fram till olika förslag som de sedan kan jämföra och diskutera när de ska ge exempel där vissa villkor är uppfyllda.

Problemlösningsförmågan. Tillgången till dynamiska matematikprogram skapar nya möjligheter att arbeta med problemlösningsförmågan på flera olika sätt. Tack vare att GeoGebra är ett kraftfullt beräkningsverktyg kan ofta mer realistiska problem ges där de numeriska värden som ingår inte behöver anpassas för att undvika beräkningsproblem. Det skapas också möjligheter att konstruera nya problem där klassiska problemlösningsstrategier som *leta efter ett mönster* och *gissa och testa* kommer till användning. Även strategin *rita en figur* kan få nytt liv genom enkelheten att testa olika hjälplinjer i en geometrisk figur.

Begreppsförmågan. GeoGebra ger nya möjligheter när det gäller att dynamiskt visualisera abstrakta matematiska begrepp. Vi har tidigare i denna text lyft fram kopplingen mellan begreppsförståelse och förmågan att representera matematiska objekt på olika sätt och att se kopplingen mellan dessa representationsformer. Den dynamiska kopplingen mellan olika representationsformer som GeoGebra erbjuder blir därför ett viktigt hjälpmedel för att ge elever förutsättningar att utveckla sin begreppsförmåga. Även möjligheten att använda GeoGebra för att undersöka samband mellan olika objekt är viktig att lyfta fram i detta sammanhang.

Procedurförmågan. Denna förmåga innefattar både att kunna utföra beräkningar för hand och med hjälp av digitala verktyg. Att kunna använda GeoGebra för att utföra vissa beräkningar kan alltså ses som en del av procedurförmågan. Dessutom kan GeoGebra gynna procedurförmågan indirekt genom att det finns många dynamiska arbetsblad som har skapats för färdighetsträning.

Modelleringsförmågan. En stor fördel med GeoGebra som vi inte har diskuterat tidigare är att det lämpar sig väl som ett modelleringsverktyg. Det kan handla om att utnyttja möjligheten till olika typer av regression som finns i GeoGebra eller att studera hur en viss modell påverkas då någon parameter ändras. Som exempel ska vi ta avsvallning av kaffe. Eleverna kan här få mäta kaffets temperatur vid olika tidpunkter och skapa en tabell i GeoGebra. Utifrån tabellen kan en lista med punkter skapas varvid punkterna även ritas in i koordinatsystemet. Därefter kan olika typer av regression testas. Om en elevgrupp kommer fram till att de ska testa exponentiell regression på de punkter som fås med tiden som x -koordinat och kaffets temperatur som y -koordinat, vilket i figur 3 motsvarar kolumnerna A och B i tabellen, fås den blå grafen. Enligt denna modell kommer temperaturen efter ett tag hamna under rumstemperaturen, vilket är orimligt. Här gäller det att inse att temperaturskillnaden mellan kaffet och det omgivande rummet bör användas. Denna temperaturskillnad har tagits fram i kolumn C och vi kan se att

motsvarande punkter har förskjutits nedåt. Gör vi exponentiell regression utifrån dessa punkter fås den gröna grafen i figuren. Nu är det troligtvis inte temperaturskillnaden utan temperaturen på kaffet vi är intresserade av. Genom att addera rumstemperaturen fås nu istället den röda grafen och funktionsformeln $T = 52,06 \cdot 0,99948^t + 22$ som väl beskriver hur kaffets temperatur beror av tiden.

Figur 3.

Figuren visar hur GeoGebra har använts för att modellera avsvälning av kaffe.



Att GeoGebra är ett mycket användbart modelleringsverktyg framgår tydligt i boken *Handbok för matematisk modellering med GeoGebra: att undervisa mot förmågorna* (Hall & Lingefjärd, 2014), där mer än 100 exempel ges på hur GeoGebra kan användas i samband med modellering.

Referenser

- Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(1), 25–45.
- Baccaglioni-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: the maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225–253.
- Drijvers, P. & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. I D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (red.), *The Didactical*

Challenge of Symbolic Calculators Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument (s. 174–196). Springer.

Hall, J. & Lingefjärd, T. (2014). *Handbok för matematisk modellering med GeoGebra: att undervisa mot förmågorna*. Studentlitteratur.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Olsson, J. (2018). The contribution of reasoning to the utilization of feedback from software when solving mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(4), 715–735.

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J. & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: instrumenting the epistemological and cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher*, 38(5), 329–342.

Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Routledge.