GeoGebra – ett dynamiskt matematikprogram

Maria Fahlgren och Mats Brunström, Karlstads universitet

I Skolforskningsinstitutets forskningsöversikt *Digitala lärresurser i Matematikundervisningen* (Wallin et al., 2017) framgår att arbete med digitala verktyg kan vara gynnsamt för elevers lärande. De skriver bland annat att:

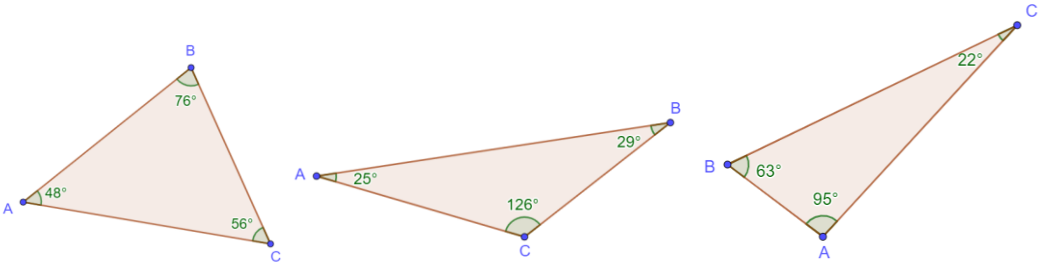
> Det tycks vara gynnsamt om digitala lärresurser skapar möjligheter för elever att uppleva och urskilja matematiska begrepp och processer visuellt och dynamiskt. Det verkar vidare vara bra om de digitala lärresurserna är konstruerade på ett sätt som uppmuntrar till dialog mellan elever och med lärare. (Wallin et al., 2017, s.55)

Skolforskningsinstitutet lyfter alltså fram möjligheten att dynamiskt visualisera matematiska begrepp och samband. I den här modulen ligger fokus på en speciell typ av digitalt verktyg som erbjuder just detta, så kallade dynamiska matematikprogram. Vi kommer att använda oss av *GeoGebra* som ett exempel på denna typ av digitalt verktyg. GeoGebra är en matematisk miljö speciellt utvecklad för undervisning på alla nivåer, allt från grundskolans tidigare år till universitetsnivå. GeoGebra kan användas både som ett kraftfullt beräkningsverktyg och som ett pedagogiskt verktyg för att stötta elevers lärande i matematik. Styrkan hos programmet ligger främst i att det gör matematiken dynamisk och interaktiv, där elever ges möjlighet att undersöka och upptäcka många matematiska begrepp och samband. Detta ger i sin tur nya möjligheter att locka eleverna till matematiska resonemang, inte minst när det gäller att formulera och undersöka egna hypoteser. På detta sätt fungerar GeoGebra som ett matematiskt laboratorium.

Några egenskaper hos denna typ av program har identifierats som extra värdefulla. Dynamiska matematikprogram gör det möjligt att göra konstruktioner som sedan kan manipuleras dynamiskt på olika sätt. Exempelvis är det möjligt att konstruera en triangel och mäta dess vinklar (se figur 1). Genom att flytta på något av triangelns hörn skapas en ny triangel. Detta gör det möjligt att undersöka vinklarna hos ett stort antal trianglar. Detta kan i sin tur användas för att undersöka vinkelsumman hos trianglar.

Figur 1.

Exempel på trianglar konstruerade i GeoGebra

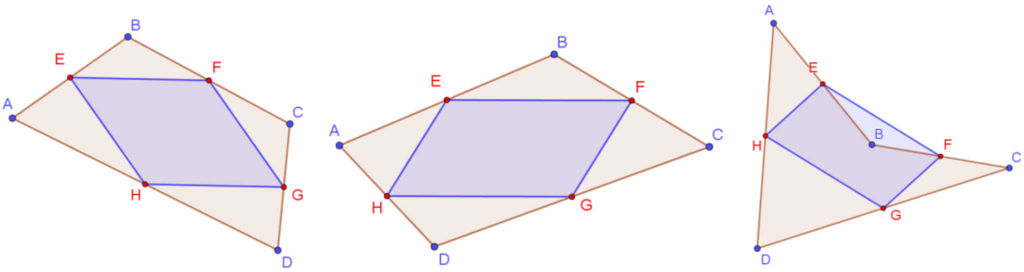


Det går även att konstruera en geometrisk figur med specifika egenskaper så att egenskaperna bevaras även om figuren manipuleras, till exempel genom att något av figurens hörn flyttas. På så vis kan ytterligare egenskaper hos den konstruerade figuren undersökas. I figur 2 visas ett exempel där grundkonstruktionen består av en godtycklig fyrhörning *ABCD*, där mittpunkterna på fyrhörningens sidor (*E*, *F*, *G* och *H*) tagits fram och bundits samman så att en ny fyrhörning har bildats. När denna konstruktion är gjord är det möjligt att dra i något av hörnen *A*, *B*, *C* eller *D* utan att själva konstruktionen förstörs. Detta gör det möjligt att studera vilka egenskaper hos fyrhörningen *EFGH* som bevaras och vilka egenskaper som varierar när fyrhörningen *ABCD* förändras. På så vis kan eleverna ges möjlighet att själva upptäcka intressanta samband.

I figur 2 återges tre olika bilder från en sådan undersökning, där vi kan se att fyrhörningen *EFGH* hela tiden verkar vara en parallellogram. En elev som ställer en sådan hypotes har möjlighet att övertyga sig om att den stämmer genom att dra i olika hörn och därmed skapa ytterligare exempel. Det är även möjligt att använda GeoGebras mätverktyg för lutning för att övertyga sig om att sidorna är parvis parallella.

Figur 2.

Konstruktionen av fyrhörningen *EFGH* bibehålls när fyrhörningen *ABCD* förändras



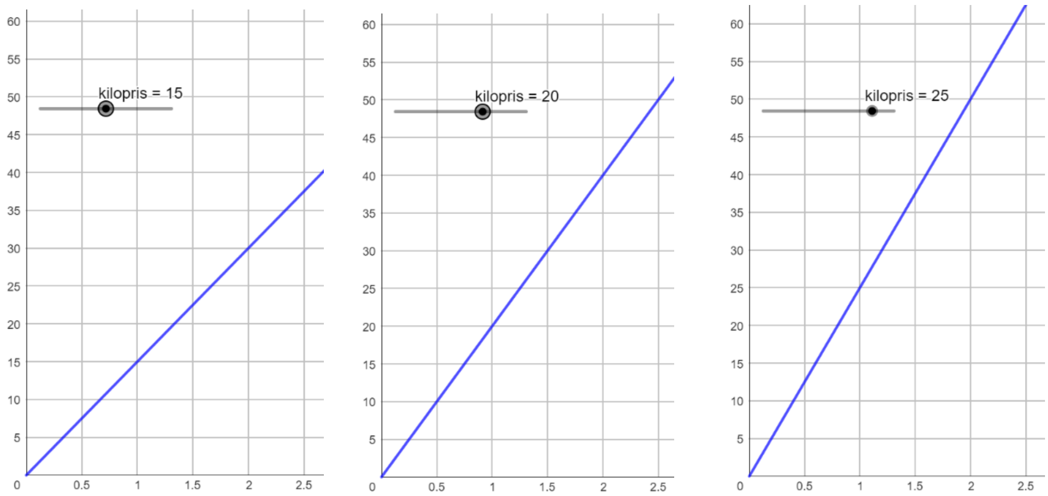
Det finns nu goda möjligheter att upptäcka ytterligare egenskaper hos en parallellogram genom att undersöka dess vinklar. En annan hypotes som eleverna själva kan tänkas komma på är att arean av parallellogrammen är hälften så stor som arean av den ursprungliga fyrhörningen. Eftersom det även går att mäta areor i GeoGebra är det möjligt att försäkra sig om att även denna hypotes verkar stämma genom att undersöka många exempel.

Möjligheten att ”dra fria objekt” (till exempel punkter) i en konstruktion är alltså en av de egenskaper hos dynamiska matematikprogram som lyfts fram som extra värdefull (Arzarello et al., 2002). De första dynamiska matematikprogrammen, som utvecklades under 1980- och 1990-talet, var egentligen dynamiska geometriprogram. De mest kända är *Cabri Geometry* och *The Geometer's Sketchpad*. Ungefär samtidigt som de första dynamiska geometriprogrammen utvecklades introducerades ett antal kraftfulla symbolhanterande program (Computer Algebra Systems, CAS), till exempel *Maple* och *Mathematica*. En viktig historisk skillnad mellan dessa båda programtyper är att dynamiska geometriprogram utvecklades för att bli användbara i undervisning medan CAS-programmen främst utvecklades för att kunna användas vid avancerade matematiska beräkningar (Ruthven et al., 2008). På senare tid har en del traditionella dynamiska geometriprogram kompletterats med CAS samtidigt som en del traditionella CAS-program har kompletterats med dynamisk geometri. Dessutom har nya program utvecklats med båda dessa funktioner. Ett sådant dynamiskt matematikprogram är just GeoGebra. Numera kan dynamiska matematikprogram användas för att visualisera och upptäcka matematiska samband inom många olika områden.

Ett område där dynamiska matematikprogram är gynnsamma för elevers kunskapsutveckling är funktioner, något som lyfts fram i *Digitala lärresurser i matematikundervisningen* (Wallin et al., 2017). Det är främst möjligheten att dynamiskt koppla en funktions olika representationsformer som är viktig i detta sammanhang (Zbiek et al., 2007). Exempelvis finns stora möjligheter att undersöka samband och förändringar med hjälp av grafisk representation. Ett verktyg som visat sig erbjuda unika möjligheter i detta sammanhang är det som kallas för ”glidare”. Glidaren gör det möjligt att exempelvis variera värdet på en parameter, exempelvis kilopris, genom att dra i en punkt placerad på en tallinje. Med hjälp av detta verktyg är det möjligt att undersöka hur olika värden på parametern påverkar motsvarande grafs form och placering i ett koordinatsystem. Om vi till exempel vill arbeta med grafer som visar proportionella samband så är det möjligt att justera exempelvis kilopriset för äpplen med hjälp av en glidare (se figur 3).

Figur 3.

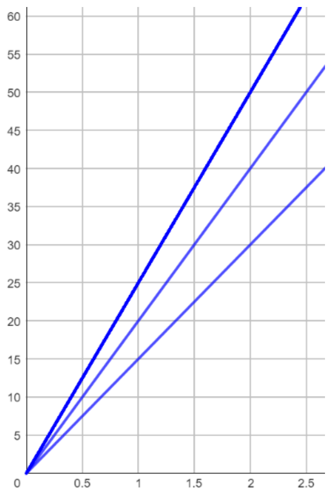
Grafer som visar priset på äpplen som funktion av vikten för några olika kilopris (som regleras med glidararen ”kilopris”)



Om vi inte vill att den ”gamla” grafen ska försvinna när värdet på en glidare ändras finns möjligheten att ”sätta spår” på funktionsgrafen, vilket gör det möjligt att tydligt se hur grafens utseende har förändrats (se figur 4). Att sätta spår på ett rörligt objekt är alltså ytterligare en möjlighet som GeoGebra erbjuder.

Figur 4.

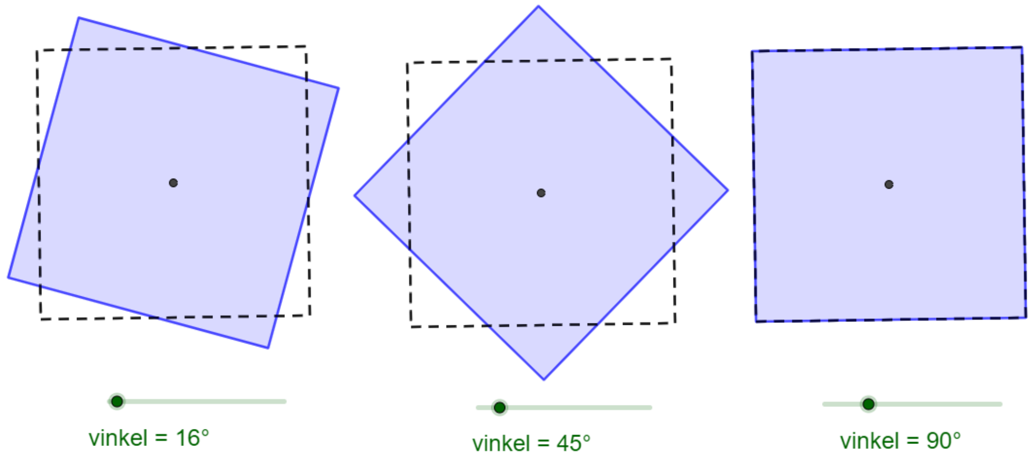
Genom att sätta spår på funktionsgrafen blir flera grafer synliga samtidigt



Även inom geometri är glidare ett användbart verktyg. Exempelvis vid undersökning av rotationssymmetri, där rotationsvinkeln kan varieras med hjälp av en glidare (se figur 5).

Figur 5.

Den blå kvadraten roteras med hjälp av glidaren ”vinkel”



Vi har nu fokuserat på några möjligheter som GeoGebra erbjuder. Naturligtvis kan vi inte förvänta oss att användandet av programmet automatiskt leder till ökat lärande. Det finns många olika faktorer som påverkar lärandet, där lärarens undervisning spelar en central roll. I kommande delar av modulen diskuteras bland annat utformning av elevinstruktioner och uppgiftsformuleringar, men vi ska komma in på uppgiftsformuleringar redan här i samband med att vi diskuterar ett exempel inom statistikområdet.

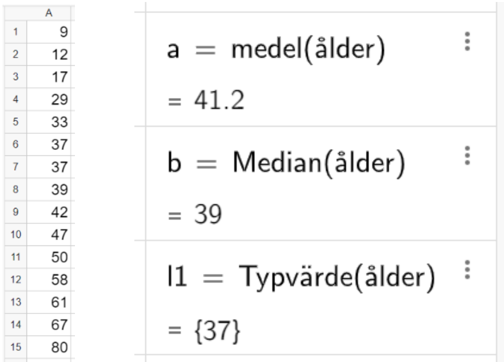
I GeoGebra är det möjligt att få fram olika lägesmått. Vi illustrerar med ett exempel.

> I ett hyreshus bor 15 personer med följande åldrar: 9, 12, 17, 29, 33, 37, 37, 39, 42, 47, 50, 58, 61, 67 och 80 år. Bestäm medelvärde, median och typvärde för de boendes ålder.

I den vänstra delen av figur 5 har åldrarna matats in i GeoGebras kalkylblad. Genom att använda inbyggda beräkningsverktyg kan sedan olika lägesmått fås (se figur 6).

Figur 6.

GeoGebra kan användas för att beräkna olika lägesmått



I det här exemplet fungerar GeoGebra som ett kraftfullt beräkningsverktyg. I många sammanhang gör tillgången till digitala verktyg att de numeriska värden som används inte behöver vara tillrättalagda för att ge ”enkla” beräkningar. När det gäller uppgifter inom statistik kan uppgifter göras mer realistiska genom att mängden data inte behöver begränsas på samma sätt.

När vi som lärare ska avgöra om en uppgift ska lösas för hand eller med hjälp av GeoGebra finns det all anledning att fundera på vilka möjligheter och risker en eventuell övergång till att använda GeoGebra innebär. Vilka kunskaper får eleverna inte längre öva på om de nu ska lösa uppgiften med hjälp av GeoGebra? I exemplet ovan är det tydligt att uppgiften går att lösa med hjälp av GeoGebra utan att förstå något av de begrepp som ingår i uppgiften. Vad kan det då finnas för fördelar med att använda GeoGebra inom detta område, förutom att eleverna lär sig att använda digitala verktyg?

En tänkbar fördel med att använda GeoGebra, förutom att de numeriska värdena kan väljas mer fritt, är möjligheten att undersöka hur ändringar av värdena i kalkylbladet påverkar de statistiska måtten. Detta är möjligt tack vare den dynamiska kopplingen som programmet erbjuder. För att GeoGebra ska utnyttjas på ett bra sätt behöver oftast nya typer av frågor ställas. Nedan ges förslag på några frågor, kopplade till exemplet ovan, som skulle kunna ställas till eleverna efter de har löst uppgiften med hjälp av GeoGebra. För samtliga frågor är tanken att eleverna först ska diskutera sig fram till ett svar, gärna i par eller små grupper, och sedan använda GeoGebra för att testa och eventuellt revidera svaret.

- Vilka lägesmått kommer att ändras om personen som är 61 år flyttar ut och en person som är 42 år flyttar in?
- Ge förslag på hur två av åldrarna kan ändras utan att medelvärdet påverkas.

- Ge förslag på hur två åldrar kan ändras så att medianen ökar samtidigt som medelvärdet minskar.
- Ge förslag på hur en av åldrarna kan ändras så att det blir mer än ett typvärde.

Den här typen av uppgifter, där eleverna först får ge ett förslag och därefter använda GeoGebra för att undersöka hur väl deras förslag stämmer, kan användas inom många olika områden. En fördel är att det inte går att komma fram till ett genomtänkt förslag utan att sätta sig in i problemet. I det aktuella exemplet innebär det att eleverna behöver förstå innebörden av medelvärde, median, och typvärde.

Innan vi lämnar statistikexemplet är det viktigt att poängtera att det ofta kan vara givande att lösa uppgifter både för hand och med GeoGebra. De lösningsstrategier som GeoGebra erbjuder kan fungera som ett komplement till tidigare strategier och därigenom ge ökad förståelse.

Ett program som GeoGebra kan användas på många olika sätt i matematikundervisningen. Det kan användas som ett lärarverktyg för att exempelvis underlätta demonstrationer och diskussioner i helklass, eller som ett elevverktyg. Läraren kan välja mellan att låta eleverna undersöka färdiga GeoGebra-applikationer eller att låta dem själva göra de konstruktioner som behövs. När elever gör egna konstruktioner kan deras förståelse för de begrepp som behandlas öka samtidigt som de får en ökad färdighet med programmet. Nya arbetsformer kan växa fram där elever ges möjlighet att ta ett större ansvar för sitt eget lärande och där samarbete mellan elever stimuleras, vilket kan öka motivationen och intresset för matematik (Skolverket, 2022). Allteftersom eleverna blir förtrogna med programmet kan det bli naturligt för dem att använda det mer spontant när de själva ser ett behov av det.

Det är förstås många faktorer som påverkar om, hur och i vilken utsträckning lärare använder digitala verktyg i sitt klassrum (Drijvers, 2015). Det är en process att integrera ny teknik i undervisningen och den behöver ske stegvis. Det handlar inledningsvis om att läraren själv behöver bekanta sig med det digitala verktyget. När det gäller GeoGebra så ska detta inte tolkas som att man själv behöver lära sig hela programmet. Liksom program som *Word* och *Excel*, kan GeoGebra ses som ett ”bottenlöst” program, som det är omöjligt att lära sig till fullo även om man har långt tid på sig. Även om GeoGebra är ett kraftfullt och komplext verktyg så har utvecklarna av programmet strävat efter att göra det användarvänligt, med syftet att göra det enkelt att börja använda programmet i liten skala. I likhet med Word och Excel, så finns det många som använder programmet och har stor behållning av det trots att de bara utnyttjar en bråkdel av de möjligheter som programmet erbjuder.

Referenser

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66−72.

Drivers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). I S. J. Cho (red.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 135−151). Springer.

Ruthven, K., Hennessy, S. & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: a study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education*, *51*(1), 297−317.

Skolverket. (2022). *Få syn på digitaliseringen på grundskolenivå*. Skolverket.

Wallin, J., Hafsteinsdottir, E., Samulesson, J., Bergman, E., Bergman, M., Fundell, S., Gulz, A., Helenius, O. & Jahnke, A. (2017). *Digitala lärresurser i matematikundervisningen*. Skolforskningsinstitutet.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W. & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: a perspective of constructs. I F. K. Lester (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (vol. 2, s. 1169−1207). NCTM.