

GeoGebra som demonstrationsverktyg

Mats Brunström och Maria Fahlgren, Karlstads universitet

I denna text fokuserar vi på hur lärare kan använda GeoGebra för att dynamiskt visualisera matematiska samband i helklass. Drijvers et al. (2010) har studerat hur olika lärare väljer att orkestrera en helklassundervisning där alla kan följa vad som händer på skärmen. De skiljer på lärarcentrerade och elevcentrerade sätt att demonstrera matematiska samband i helklass. De fann att en vanligt förekommande lärarcentrerad demonstration var då läraren förklarade vad som hände på skärmen med fokus på det matematiska innehållet. Denna typ av orkestrering motsvarar en lärarstyrd genomgång (vid tavlan). Skillnaden är att läraren nu har möjlighet att dynamiskt visualisera det matematiska innehållet. En annan lärarcentrerad demonstration som förekom frekvent i studien av Drijvers et al. var då läraren fokuserade på hur det digitala verktyget fungerar.

Drijvers et al. fann även att lärarna ibland använde det digitala verktyget för att öka interaktionen med eleverna så att det blev en diskussion kring vad som hände på skärmen. I denna elevcentrerade demonstration uppmuntrar läraren eleverna att ställa hypoteser som sedan kan testas. Det kan exempelvis handla om vad som händer med arean hos en kvadrat om sidans längd fördubblas. Den direkta återkopplingen som ett dynamiskt matematikprogram erbjuder kan stimulera denna typ av helklassdiskussioner. Naturligtvis är det många aspekter som blir avgörande för vilken typ av diskussion det blir, inte minst vilka klassrumsnormer som råder. Skolforskningsinstitutet lyfter fram 'utforskande samtal' som eftersträvaransvärda vid helklassdiskussioner i matematikundervisningen (Fredriksson et al., 2017, s. XI). I dessa samtal uppmuntras eleverna till gemensamma matematiska resonemang där de engageras i varandras idéer för att uppnå en gemensam förståelse. Läraren kan stödja denna typ av samtal genom "... att ställa öppna frågor, lyssna noga på och ta tillvara elevernas matematiska idéer, liksom att uppmuntra elevernas engagemang i andra elevers matematiska idéer" (Fredriksson et al., 2017, s. XI).

Även om den elevcentrerade demonstrationen är eftersträvaransvärd så ställer den större krav på läraren eftersom den blir mer oförutsägbar, det vill säga det blir svårare att förutse vilka diskussioner som uppstår. Detta kan även innebära att läraren behöver vara beredd på att använda det digitala verktyget på ett sätt som inte var planerat från början.

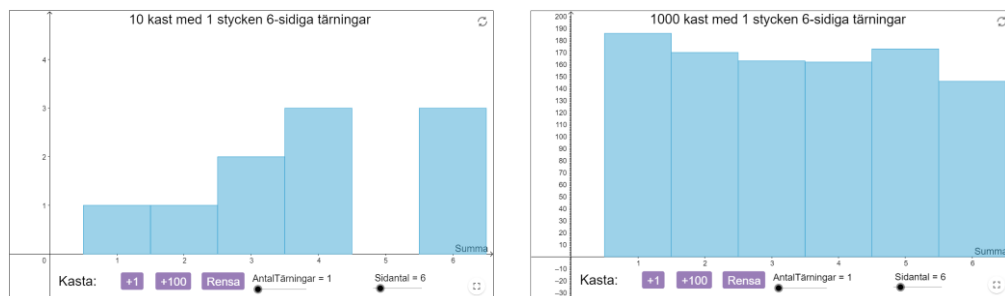
För att visualisera och diskutera matematiska samband i helklass behöver läraren antingen göra en egen konstruktion i GeoGebra eller utnyttja någon av alla de

färdigkonstruerade applikationer som andra användare av GeoGebra har delat på www.geogebra.org. Även om det finns många bra applikationer på svenska så kan det vara intressant att använda någon applikation på annat språk. Till exempel finns det många väl genomarbetade applikationer på engelska som kan vara lämpliga att använda. Ibland kan en befintlig resurs behöva anpassas för att fungera bra i en viss klass. För att en klassrumsdiskussion skall bli elevcentrerad behövs väl genomtänkta frågor. Nedan diskuterar vi lämpliga frågor att ställa utifrån tre exempel på färdiga applikationer.

Det första exemplet är konstruerat av Jonas Hall, föreståndare på Svenska GeoGebrainstitutet. Det handlar om slumpmässiga försök i form av kast med tärning samt hur sannolikhetsfördelningen växer fram då antalet försök ökar. Applikationen är konstruerad så att antalet tärningar och antalet sidor på tärningarna kan varieras. Det är möjligt att göra ett eller 100 kast åt gången. I figur 1 visas exempel på resultat vid 10 respektive 1000 tärningskast med en tärning. En helklassdiskussion där applikationen används kan förstås orkestreras på många olika sätt, bland annat beroende på elevernas kunskapsnivå och rådande klassrumsnormer. Nedan diskuteras några tänkbara sätt att möjliggöra en elevcentrerad demonstration.

Figur 1.

Dynamisk applikation som simulerar kast med en tärning



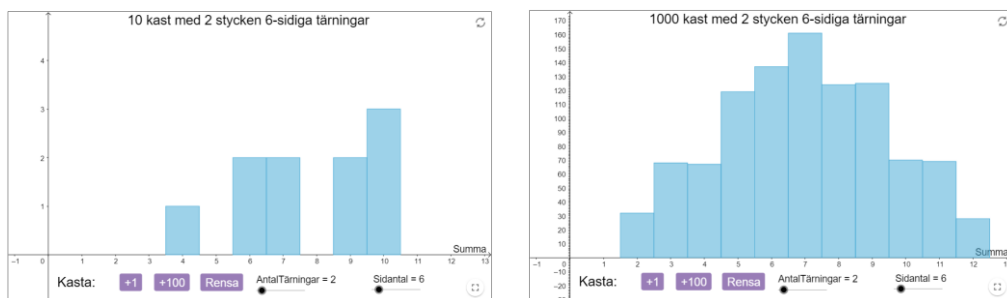
Kommentar. se <https://www.geogebra.org/m/xq9kpw25#material/uw9abccq>

Innan applikationen används, kan läraren engagera eleverna genom att be dem i par/grupp att diskutera vad de tror är vanligast att få vid kast med en tärning. Förhoppningsvis blir eleverna motiverade att se vad som händer när simuleringen därefter påbörjas. Om resultatet efter 10 kast liknar det i figur 1, blir troligtvis många elever förvånade, vilket i sin tur kan leda till intressanta diskussioner. Här kan det vara lämpligt att låta eleverna diskutera hur de tror att resultatet bör se ut efter 100 kast, 200 kast och så vidare. När exempelvis 1000 tärningskast simulerats och diagrammet liknar det till höger i figur 1 kan det vara läge att låta eleverna försöka förklara varför resultatet ser ut som det gör. Ett nästa steg kan vara att öka antalet tärningar till två tärningar och låta eleverna diskutera vad de tror att summan blir. En fördel med två 6-sidiga tärningar

är att det är något som de flesta elever troligtvis kan relatera till. Exempel på resultat vid 10 respektive 1000 kast visas i figur 2.

Figur 2.

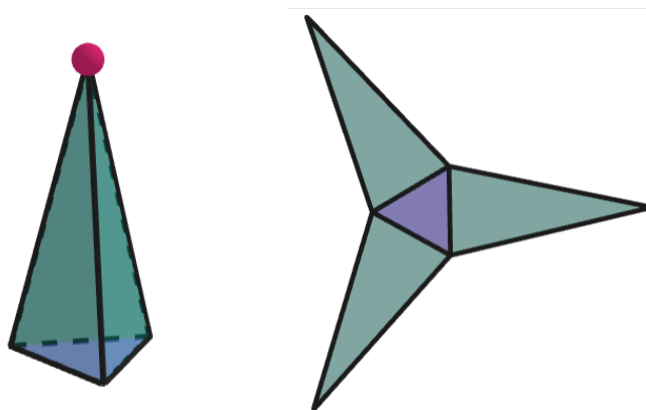
Dynamisk applikation som simulerar kast med två tärningar



Med hjälp av nästa applikation (se figur 3), skapad av *the GeoGebra Content Team*, kan klassen utforska inbördes relationer mellan två- och tredimensionella geometriska objekt.

Figur 3.

Dynamisk applikation för att illustrera relationen mellan två- och tredimensionella objekt



Kommentar. se <https://www.geogebra.org/m/sgx8keqx>

I applikationen finns en glidare för att veckla ut den tredimensionella figuren så att motsvarande tvådimensionella begränsningsyta visas (se figur 3). Här finns möjlighet att engagera eleverna genom att be dem diskutera hur de tror att begränsningsytan ser ut (innan denna visas för eleverna). Att uttrycka detta muntligt kan vara en nyttig kommunikationsövning. Om de dessutom uppmuntras att rita en skiss av begränsningsytan tvingas de tänka efter lite mer än om de bara ska uttrycka sina tankar muntligt.

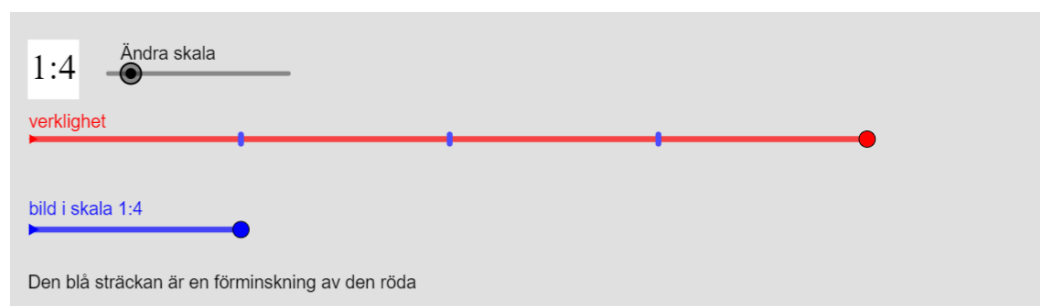
Det finns även en glidare för antalet hörn hos basytan. En naturlig fortsättning kan vara att fråga eleverna hur de tror att de båda figurerna kommer se ut om bottenytan är en kvadrat istället för en triangel.

Applikationen erbjuder även möjlighet att ändra typ av tredimensionell figur. Exempelvis kan en cylinder studeras. Här skulle läraren kunna börja med att visa den tvådimensionella begränsningsytan och be eleverna diskutera vilken tredimensionell figur det handlar om.

Den tredje applikationen (se figur 4) handlar om skala och är konstruerad av Svetlana Yushmanova och Anders Karlsson. Applikationen består av en röd sträcka, vars längd kan varieras, samt en blå avbildning av denna sträcka i en viss skala. Skalan kan varieras från 1:5 till 5:1. Det finns även en text som anger om det handlar om förminskning eller förstoring.

Figur 4

Dynamisk applikation för skala



Kommentar. se <https://www.geogebra.org/m/DuM9Ek2v#material/mDKF8UNS>

För att få eleverna engagerade, kan det vara fördelaktigt att ställa frågor där eleverna får diskutera och komma med förslag som sedan kan testas. Några förslag på frågor, när skalan är inställd som i figur 3, är:

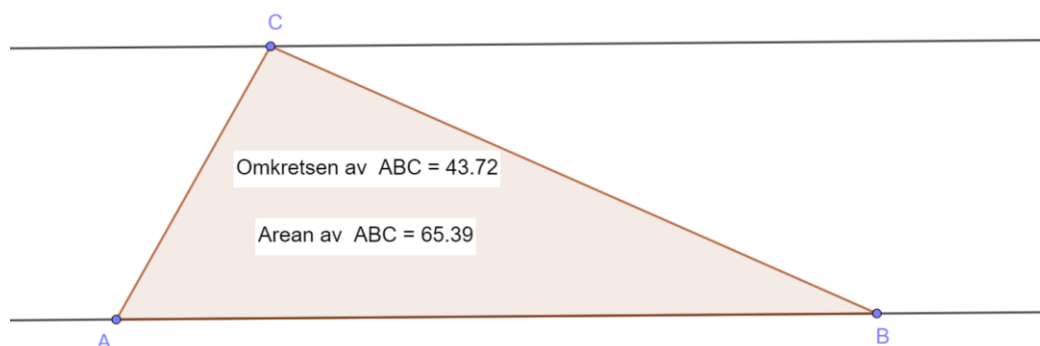
- Vad händer med den blå sträckan om längden på den röda sträckan halveras?
- Vad händer med den blå sträckan om skalan ändras till 1:2?
- Hur ska skalan förändras för att den blå sträckan ska bli dubbelt så lång?

Den information som synliggörs i en applikation kan spela stor roll för vilken typ av frågor som är lämpliga att ställa. Om vi exempelvis väljer att ta bort rutan där skalan anges i applikationen i figur 3 kan istället läraren ställa in ett visst värde på skalan och låta eleverna diskutera vilken skala det handlar om samt hur denna skala skrivs.

För att konstruera många av de applikationer som finns på www.geogebra.org krävs viss vana att arbeta med GeoGebra. Vi avslutar med ett exempel på en applikation som är förhållandevis enkel att konstruera. Hur konstruktionen går till finns beskrivet i introduktionsguiden. Konstruktionen (se figur 5) kan användas för att demonstrera area och omkrets hos trianglar med samma bas och höjd.

Figur 5.

Konstruktion för att undersöka area och omkrets hos trianglar med samma bas och höjd.



Konstruktionen är gjord så att de båda linjerna är parallella och punkterna A, B och C är flyttbara. Istället för att läraren direkt demonstrerar hur omkretsen ändras samtidigt som arean förblir densamma då punkten C flyttas, kan eleverna engageras genom att de får diskutera frågor som exempelvis:

- Vad tror ni händer med area och omkrets om punkten C flyttas?
- Vad tror ni händer med area och omkrets om punkten B flyttas?
- Var tror ni punkten C ska placeras för att omkretsen ska bli så liten som möjligt?
- Hur stor kan omkretsen bli när punkten C flyttas?

I exemplen ovan gavs ett antal förslag på hur demonstrationer med GeoGebra kan utvecklas till mer elevcentrerade diskussioner. Förslagen har handlat om att:

- eleverna först får diskutera i par eller små grupper innan deras förslag ligger till grund för en helklassdiskussion. Förutom att fler elever blir aktiva vid gruppdiskussioner, kan det vara en trygghet för eleverna att det är gruppens förslag som diskuteras.
- först be eleverna diskutera vad de tror kommer att hända på skärmen innan GeoGebra används för att visa vad som händer. På så vis får eleverna direkt återkoppling på sina hypoteser. Denna uppgiftstyp, som i engelskspråkig litteratur

benämns ”prediction task”, rekommenderas ofta för att stimulera matematiska resonemang (Laborde, 2002).

- be eleverna komma med förslag på *varför* vissa saker händer på skärmen. Om undersökningsresultat och hypoteser inte stämmer överens är det viktigt att försöka förklara varför (Laborde, 2002). Enligt Arcavi och Hadas (2000) kan oväntade undersökningsresultat leda till att motivationen att söka förklaringar ökar och därmed kan även möjligheterna för elever att reda ut eventuella missuppfattningar öka.
- vid användning av befintliga applikationer, reflektera över eventuella behov av anpassning för att kunna formulera mer öppna frågor. Det kan exempelvis handla om att dölja delar av applikationen för att eleverna själva ska få möjlighet att reflektera och ställa hypoteser.

I denna del har vi gett exempel på hur demonstrationer kan göras mer elevcentrerade. Motsvarande exempel skulle även kunna användas som elevaktiviteter där eleverna på egen hand arbetar med GeoGebra.

Referenser

- Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(1), 25–45.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. C. & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234.
- Fredriksson, K., Envall, I., Bergman, E., Fundell, S., Norén, E. & Samuelsson, J. (2017). *Klassrumdialog i matematikundervisningen: matematiska samtal i helklass i grundskolan*. Skolforskningsinstitutet.
- Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283–317.