

Elevaktiviteter med GeoGebra-konstruktioner

Mats Brunström och Maria Fahlgren, Karlstads universitet

I denna text fokuserar vi på aktiviteter där eleverna själva gör de GeoGebra-konstruktioner som behövs. Beroende på hur stor erfarenhet eleverna har av GeoGebra kan de behöva mer eller mindre stöd i form av instruktioner. Jämfört med att låta eleverna arbeta med dynamiska arbetsblad tar det förstås mer tid i anspråk när de ska göra egna konstruktioner. Lärare behöver väga den tid det beräknas ta för elever att själva göra de konstruktioner som behövs mot möjligheten till matematiskt lärande både på kort och lång sikt.

Det finns fördelar med att låta elever göra egna konstruktioner i GeoGebra. Förutom att de lär sig att hantera GeoGebra så kan ibland själva konstruktionen bygga på och stötta den matematiska förståelsen (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Till exempel behövs kunskap om definitionen av en rektangel för att konstruera en rektangel som förblir en rektangel även om vi drar i något av dess hörn. För att rektangeln skall bli ”robust” måste konstruktionen bygga på att samtliga vinklar är räta, vilket innebär att verktyget för vinkelräta linjer behöver utnyttjas. Den färdiga konstruktionen kan sedan enkelt testas genom att dra i något av rektangelns hörn. På det här sättet ger programmet en direkt återkoppling och det blir uppenbart om konstruktionen bygger mer på visuell igenkänning än matematisk förståelse.

Det finns förstås även nackdelar med att låta elever göra egna konstruktioner i GeoGebra. Risken är till exempel större att elever stöter på oväntade problem som inte har med själva matematiken att göra. Det kan handla om problem med syntax såsom att punkt måste användas som decimalkomma i GeoGebra. Om konstruktionerna är för komplexa är risken stor att fokus blir på tekniken snarare än på matematiken. När lärare beslutar om det är lämpligt att låta elever arbeta med ett färdigt dynamiskt arbetsblad eller en elevaktivitet där de även gör egna konstruktioner behöver möjligheter vägas mot risker.

Konstruktion av elevaktiviteter

Nedan diskuteras flera olika aspekter att reflektera kring vid utformandet av elevaktiviteter där elever själva gör de konstruktioner som behövs. Vi har valt att kalla dessa aspekter för *didaktiska variabler*. Forskare föreslår didaktiska variabler som ett verktyg vid utformandet av elevaktiviteter (Ruthven et al., 2009). Didaktiska variabler handlar om designval som kan påverka elevers lärande på olika sätt. Vi kommer i det

följande att diskutera några didaktiska variabler som kan vara värda att reflektera över vid konstruktion eller anpassning av elevaktiviteter.

Behov av GeoGebra-instruktioner

Beroende på i vilken utsträckning eleverna är bekanta med GeoGebra sedan tidigare kan en elevaktivitet behöva innehålla mer eller mindre detaljerade instruktioner för hur själva programmet fungerar. Figur 1 visar ett utdrag ur elevaktiviteten [Undersök fyrhörningar](#). I detta exempel utgår vi från att eleverna inte tidigare har arbetat med GeoGebra varför aktiviteten behöver ha utförliga instruktioner. Syftet är här att eleverna, förutom att lära sig matematik, skall utveckla förtrogenhet med att använda programmet. Exempelvis lär de sig att använda polygonverktyget för att konstruera en fyrhörning samt hur dess form kan ändras.

Figur 1.

Utdrag ur elevaktiviteten *Undersök fyrhörningar*



Konstruera en fyrhörning genom att:

- Klicka på polygonverktyget: .
- Klicka därefter någonstans på skärmen för att markera första hörnet.
- Klicka sedan 3 gånger till på skärmen för att markera de andra hörnen i fyrhörningen.
- Avsluta genom att klicka i den första punkten.

Tips! Genom att klicka på  och "dra" i något av fyrhörningens hörn skapas nya exempel på fyrhörningar.

Naturligtvis är det viktigt att anpassa instruktionerna efter aktuell elevgrupp. Då lärare ska använda en befintlig elevaktivitet kan instruktioner behöva läggas till eller tas bort. En didaktisk variabel att reflektera kring är alltså hur utförliga GeoGebra-instruktionerna behöver vara.

Lösning med eller utan digitalt verktyg

Att lösa en uppgift med eller utan ett digitalt verktyg innebär oftast olika Lösningstrategier, vilka i sin tur erbjuder olika möjligheter till lärande. Vi illustrerar med ett exempel från ett nationellt prov i matematik för år 6 (se figur 2).

Figur 2.

Uppgift från nationella provet i matematik 2016.

- 33.** En känguru är snabb. På en timme hoppar den 54 km.
Hur långt kommer kängurun på 7
minuter om den hoppar lika snabbt
hela tiden?
Visa hur du löser uppgiften.

För att lösa uppgiften utan GeoGebra kan eleven exempelvis börja med att räkna ut hur långt kängurun kommer på en minut, det vill säga sträckan/tiden ($54/60 = 0,9$) och därefter multiplicera med antalet minuter ($7 \cdot 0,9 = 6,3$). Om eleven i stället löser uppgiften grafiskt med GeoGebra behöver eleven konstruera en linje i ett koordinatsystem där x-axeln representerar tiden och y-axeln sträckan. Linjen går genom origo och punkten (60, 54). Därefter behöver eleven kunna tolka grafen för att besvara uppgiften. Om vi jämför lösningarna utan hjälp av GeoGebra respektive med hjälp av GeoGebra så inser vi att det handlar om två helt olika strategier, vilka erbjuder olika typer av lärande. Här är det viktigt att som lärare vara klar över syftet med uppgiften. Användandet av GeoGebra kan göra att syftet med en uppgift förloras men det kan också ge nya möjligheter till lärande.

Ett exempel på en uppgift där Lösningsstrategierna är skilda men där själva konstruktionen i GeoGebra kan bidra till ökat lärande är konstruktionen av en rektangel (som diskuterats tidigare). Det är möjligt att rita en rektangel för hand (med papper och penna) utan att vara medveten om dess egenskaper, det räcker att känna igen dess form. För att konstruera en ”robust” rektangel i GeoGebra krävs däremot djupare kunskaper. I samband med detta kan skillnaden mellan definition och egenskap diskuteras. I det här fallet är egenskapen att sidorna är parvis parallella en följd av definitionen att samtliga vinklar är rätta. För att det skall bli en ”robust” konstruktion måste den byggas på definitionen, det räcker inte med att det är parvis parallella sidor.

Vi har nu sett exempel på hur en och samma uppgift kan erbjuda olika möjligheter till lärande beroende på om den löses med eller utan GeoGebra. Många gånger kan det vara värdefullt att genomföra samma uppgift både med och utan ett digitalt verktyg. Forskning visar att det kan vara värdefullt för elever att jämföra olika sätt att lösa uppgifter för att få en ökad förståelse för den aktuella matematiken (Kilpatrick et al., 2001). Det blir viktigt för lärare att avgöra om en uppgift skall lösas med digitalt verktyg, för hand med papper och penna eller både och. Detta är ännu ett exempel på en didaktisk variabel att reflektera över. Många gånger kan detta val hänga ihop med vilken representationsform som är lämpligast att använda.

Olika representationsformer

Att kunna använda och se samband mellan olika representationsformer är betydelsefullt för att utveckla en god begreppsförståelse i matematik (Kilpatrick et al., 2001).

Dynamiska matematikprogram ger nya möjligheter att tydliggöra kopplingen mellan olika representationsformer såsom algebraisk och grafisk. Ett tydligt exempel är vid arbete med proportionella samband där sambandet kan uttryckas både algebraiskt och grafiskt. Här finns möjlighet att exempelvis justera kilopriset på äpplen med hjälp av en glidare och studera hur både den algebraiska och grafiska representationen ändras. Det blir även möjligt att lösa uppgifter både algebraiskt och grafiskt. Även om det kan vara fördelaktigt att uppmuntra elever till att använda flera representationsformer så kräver detta ofta ytterligare konstruktioner, vilket i sin tur kan ta bort fokus från matematiken. Valet av representationsformer blir därmed en didaktisk variabel att beakta.

Matematiska förklaringar

Ett sätt att uppmuntra elever att gå från visuella observationer till matematisk förståelse kan vara att be dem ge en matematisk förklaring till sina observationer. Dock är det viktigt att det verkligen finns något att förklara då förklaringar efterfrågas och att eleverna har de förkunskaper som krävs för att kunna ge en förklaring. Ibland kan det därför räcka med att be dem beskriva vad som sker på skärmen. Att avgöra när det är lämpligt att be elever att förklara är ytterligare en didaktisk variabel.

Olika typer av uppgifter

Några uppgiftstyper som lämpar sig väl för den typ av elevaktiviteter som behandlas i denna text diskuteras nedan.

Undersökande uppgifter. En av de främsta fördelarna med GeoGebra är att matematik kan bli ett mer laborativt ämne där elever har möjlighet att undersöka och upptäcka matematiska samband. I elevaktiviteten [Rektanglar och trianglar](#) får exempelvis eleverna undersöka sambandet mellan areorna hos rektanglar och trianglar med samma bas och höjd. De får även undersöka hur triangelns area och omkrets påverkas om triangelns form ändras (då bas och höjd hålls konstant).

Förutse och testa. Då elever arbetar med en undersökande uppgift uppmannas de ofta att ställa en hypotes *efter* att de gjort en undersökning, som de därefter får testa och eventuellt även förklara. Ett alternativ är att låta eleverna först formulera en hypotes (genomtänkt gissning) som de därefter får testa med GeoGebra. På detta sätt uppmuntras eleverna att sätta sig in i den matematiska situationen innan de börjar undersöka med GeoGebra. Forskning visar att det är gynnsamt om eleverna formulerar sina hypoteser explicit, gärna skriftligt (t.ex. Arcavi & Hadas, 2000). Exemplet ovan med rektangelns och triangelns areor skulle även kunna omformuleras till denna typ av uppgift genom att

be eleverna att först ställa en hypotes kring sambandet mellan areorna. Därefter får de använda GeoGebra för att testa sin hypotes genom att mäta areorna.

Konstruera exempel. Exempel spelar en central roll i matematikundervisningen. Oftast presenteras de av lärare eller lärobok som demonstration av begrepp och metoder. Dock visar forskning att elevers engagemang och kreativitet kan öka om de får konstruera egna exempel utifrån givna villkor (Watson & Mason, 2005). Det kan exempelvis handla om att konstruera ett geometriskt objekt som har vissa egenskaper. Tillgången till dynamiska matematikprogram kan gynna denna uppgiftstyp genom att elever kan testa och eventuellt justera sina förslag. För att illustrera uppgiftstypen ska vi diskutera några alternativ till att be elever räkna ut arean av olika givna trianglar. Här är det möjligt att vända på uppgiften och istället be eleverna konstruera egna exempel på trianglar som uppfyller vissa villkor, till exempel

- Använd polygonverktyget för att rita en triangel i GeoGebra (med rutnätet synligt) som har arean 12 a.e. Använd mätverktyget för area för att kontrollera ditt svar.
- Ändra triangeln så att du får en ny triangel med samma area.
- Ändra triangeln så att du får en ny triangel med samma area genom att endast flytta ett av triangelns hörn.
- Ändra triangeln så att basen blir mindre samtidigt som arean blir densamma.
- Konstruera en triangel med arean 12 a.e. som är väldigt olik era tidigare trianglar.
- Konstruera en triangel med arean 12 a.e. som ni tror att ingen annan elev i Sverige skulle konstruera om de fick samma uppgift.

Detta är exempel på öppna uppgifter där det egentligen finns oändligt många olika trianglar som eleverna kan ange som svar. Här finns ingen given triangel att utgå ifrån vilket gör att det ställs större krav på kreativitet och matematisk förståelse för att lösa uppgifterna. Dessa uppgifter lämpar sig särskilt bra som par- eller gruppuppgifter eftersom de kan ge stora möjligheter till givande matematiska diskussioner. Möjligheten (och uppmaningen) att testa svaren i GeoGebra gör att ett felaktigt förslag som ändå är på rätt väg kan ge upphov till givande diskussioner kring hur triangeln kan ändras för att få den önskade arean. När eleverna ska konstruera nya trianglar behöver de reflektera kring vilka förändringar de kan göra utan att arean förändras.

Naturligtvis finns det flera lämpliga uppgiftstyper som kan vara aktuella. De ovan nämnda är exempel på uppgiftstyper som kan användas för att uppmuntra eleverna att ställa hypoteser som de därefter får testa och eventuellt även förklara. Uppgiftstyperna bygger på att eleverna kan tolka den återkoppling som GeoGebra ger, något som ibland kan vara en utmaning. Det finns studier som visar att elever i större utsträckning kan

tolka återkopplingen från GeoGebra om de har formulerat egna hypoteser som de testat (Olsson, 2018).

Valet av uppgiftstyp kan ses som en didaktisk variabel. Exempelvis kan det vara bra att reflektera kring om eleverna ska ställa en hypotes *efter* att de gjort en undersökning eller om de *först* ska formulera en hypotes som de därefter får testa med GeoGebra.

Den typ av elevaktiviteter som beskrivs i denna del tar lite längre tid att genomföra och en relevant fråga blir naturligtvis om det är värt att lägga så mycket tid på en aktivitet. Här vill vi lyfta fram möjligheten att arbeta med förmågorna. Oftast ger arbetet med en aktivitet elever möjlighet att utveckla flera förmågor. När det gäller att bestämma sig för om en aktivitet ska användas eller inte kan det därför vara värt att reflektera kring vilka förmågor som kan aktiveras.

Matematiska förmågor

Vid ett flertal tillfällen har vi, både i denna del och tidigare delar, berört hur användandet av GeoGebra kan främja elevers lärande på olika sätt. Som avslutning på modulen diskuteras kortfattat användandet av GeoGebra kopplat till några matematiska förmågor.

Resonemangsförmågan. Vi har i texterna vid ett flertal tillfällen poängterat att GeoGebra gör det möjligt för elever att undersöka och själva upptäcka många av de matematiska samband som ingår i grundskolans matematik. När elever arbetar med undersökande aktiviteter kan de uppmanas att förutsäga, hitta mönster, ställa hypoteser, motivera, generalisera och förklara. Det kan med andra ord skapas förutsättningar att utveckla elevers resonemangsförmåga.

Kommunikationsförmågan. Arbeta med GeoGebra kan även skapa goda förutsättningar för en matematiskt grundad kommunikation. Det kan exempelvis handla om att muntligt eller skriftligt beskriva matematiska samband som synliggörs med hjälp av GeoGebra eller att jämföra och diskutera olika tolkningar av vad som händer på skärmen. Samtliga uppgiftstyper som nämns i avsnittet ovan lämpar sig väl för att genomföras i par eller mindre grupper och ger goda möjligheter till matematisk kommunikation. Exempelvis är chanserna stora att eleverna kommer fram till olika förslag som de sedan kan jämföra och diskutera när de ska ge exempel där vissa villkor är uppfyllda.

Problemlösningsförmågan. Tillgången till dynamiska matematikprogram skapar nya möjligheter att arbeta med problemlösningsförmågan på flera olika sätt. Tack vare att GeoGebra är ett kraftfullt beräkningsverktyg kan ofta mer realistiska problem ges där de numeriska värden som ingår inte behöver anpassas för att undvika beräkningsproblem. Det skapas också möjligheter att konstruera nya problem där klassiska

problemlösningstrategier som *leta efter ett mönster* och *gissa och testa* kommer till användning. Även strategin *rita en figur* kan få nytt liv genom enkelheten att testa olika hjälplinjer i en geometrisk figur.

Begreppsförmågan. GeoGebra ger nya möjligheter när det gäller att dynamiskt visualisera abstrakta matematiska begrepp. Vi har tidigare i denna text lyft fram kopplingen mellan begreppsförståelse och förmågan att representera matematiska objekt på olika sätt och att se kopplingen mellan dessa representationsformer. Den dynamiska kopplingen mellan olika representationsformer som GeoGebra erbjuder blir därför ett viktigt hjälpmedel för att ge elever förutsättningar att utveckla sin begreppsförmåga. Även möjligheten att använda GeoGebra för att undersöka samband mellan olika objekt är viktig att lyfta fram i detta sammanhang.

Metodförmågan. Denna förmåga innefattar både att kunna utföra beräkningar för hand och med hjälp av digitala verktyg. Att kunna använda GeoGebra för att utföra vissa beräkningar kan alltså ses som en del av metodförmågan. Dessutom kan GeoGebra gynna metodförmågan indirekt genom att det finns många dynamiska arbetsblad som har skapats för färdighetsträning.

Referenser

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(1), 25–45.

Baccaglioni-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: the maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225–253.

Drijvers, P. & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. I D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (red.), *The didactical Challenge of Symbolic Calculators Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (s. 174–196). Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Olsson, J. (2018). The contribution of reasoning to the utilization of feedback from software when solving mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(4), 715–735.

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J. & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: instrumenting the epistemological and cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher*, 38(5), 329–342.

Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Routledge.