

Dynamiska arbetsblad med GeoGebra

Maria Fahlgren och Mats Brunström, Karlstads universitet

I denna text kommer vi att fokusera på elevers användande av dynamiska matematikprogram. Förutom att själv kunna använda GeoGebra, behöver läraren kunna avgöra när det är lämpligt att använda GeoGebra samt vilka eventuella hinder elever kan uppleva då de använder programmet. Ett sätt att minska risken för att elever skall fastna i tekniska problem är att låta dem arbeta med färdigkonstruerade applikationer. Idag erbjuder många digitala läromedel denna typ av interaktiva komponenter. Det finns även en uppsjö av färdiga GeoGebra-applikationer att tillgå, via exempelvis www.geogebra.org, som lärare kan använda men också anpassa till sin egen undervisning. Naturligtvis är det även möjligt för lärare att själva konstruera applikationer som de sedan kan dela med sina elever.

En av styrkorna med ett dynamiskt matematikprogram är möjligheten till interaktion där den visuella återkopplingen gör det möjligt för elever att snabbt testa olika idéer. Dock visar forskning att det ibland kan vara svårt för elever att tolka återkopplingen på ett konstruktivt sätt. För att lärande skall kunna ske behöver eleverna kunna tolka den visuella återkopplingen och översätta den till matematisk kunskap (Joubert, 2017). De behöver, som Noss et al. (1997) uttrycker det, mentalt kunna gå från det empiriska/visuella till det systematiska/matematiska. Det finns en identifierad risk att elever, medan de arbetar med ett dynamiskt matematikprogram, endast kommer att förhålla sig till de empiriska/visuella objekt som erhålls på skärmen utan att reflektera över den bakomliggande matematiken. Därför är det viktigt, vid utformningen av elevaktiviteter, att tänka på hur uppgifter kan formuleras så att de uppmuntrar eleverna att gå längre än att bara rapportera vad de har sett på skärmen (Joubert, 2017). Ett sätt att göra detta på är att be eleverna om förklaringar till de observationer de gör.

Vi kommer i denna del att fokusera på olika aspekter att beakta i samband med användningen av färdigkonstruerade applikationer. I jämförelse med en statisk bild är en rörlig bild eller en interaktiv komponent mer komplex. Därför blir det viktigt att reflektera över vilka instruktioner eleverna behöver få och hur frågorna skall formuleras för att rikta deras uppmärksamhet mot syftet med applikationen. Vi har valt att kalla en färdigkonstruerad GeoGebra-applikation med tillhörande text i form av instruktioner och frågor till elever för ett *dynamiskt arbetsblad*.

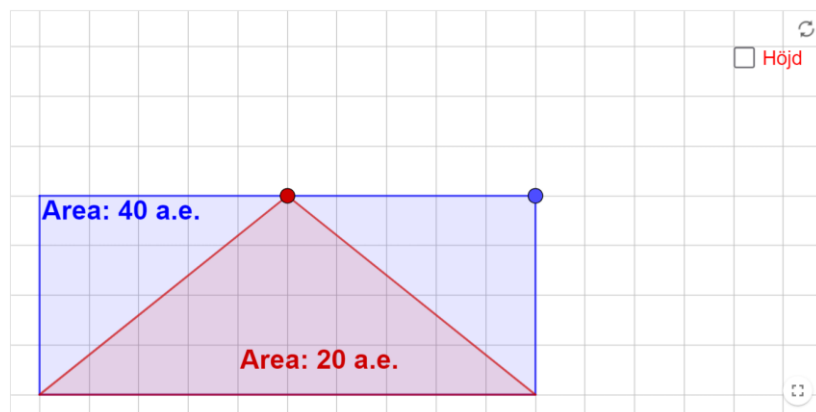
Dynamiska arbetsblad för olika syften

Det kan naturligtvis finnas olika syften med att använda dynamiska arbetsblad beroende på vilka förmågor som är i fokus. Ett vanligt syfte är att bjuda in elever till ett undersökande arbetssätt där de ges möjlighet att "...experimentera med matematik för att utveckla förståelse för ämnet." (Skolverket, 2022, s. 21). De möjligheter till undersökande arbetssätt som erbjuds med GeoGebra kan i sin tur locka elever till matematiska resonemang, inte minst när det gäller att formulera och undersöka egna hypoteser. Forskning visar att det kan vara fördelaktigt att låta elever arbeta parvis med undersökande aktiviteter i matematik (Arzarello & Robutti, 2010). Det är då lämpligt att de arbetar tillsammans vid en dator så att de kan resonera och kommunicera utifrån resultat som visas på en gemensam skärm.

I figur 1 ges ett exempel där eleverna uppmuntras att undersöka sambandet mellan areorna hos rektanglar och trianglar med samma bas och höjd.

Figur 1.

Dynamiskt arbetsblad för undersökning av triangelns area



Kommentar. se <https://www.geogebra.org/m/brqxazpi>

I applikationen är den röda punkten flyttbar längs rektangelns övre sida. Rektangelns area kan varieras genom att flytta den blå punkten vägrätt och/eller lodrätt. I arbetsbladet ges följande instruktioner med tillhörande frågor:

1. Jämför **rektangelns area** och **triangelns area**.
Vilket samband finns mellan areorna?
2. Dra i den **röda punkten** så att triangeln ändras (utan att rektangeln ändras).
Vad händer med sambandet mellan areorna?
3. Ändra rektangelns area genom att dra i den **blå punkten**.
Vad händer med sambandet mellan areorna?
4. *Försök förklara varför sambandet gäller.*

Som hjälp kan du se triangelns höjd genom att kryssa i rutan uppe till höger.

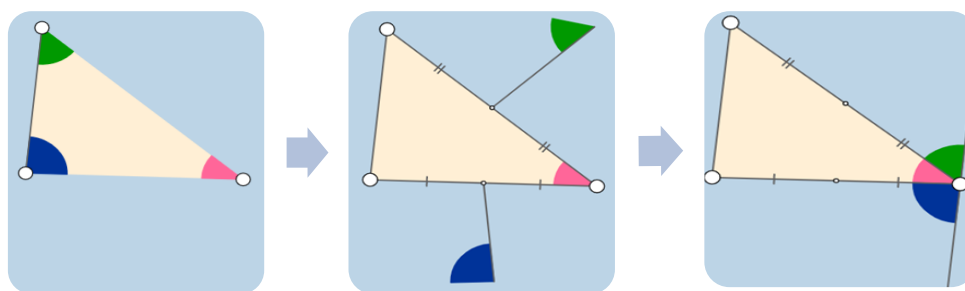
Efter att ha formulerat ett förslag till samband får eleverna alltså testa om sambandet verkar gälla även när triangelns form ändras samt när rektangelns area ändras. I detta arbetsblad får eleverna även försöka förklara sambandet. Här finns en ledtråd för de elever som behöver det. Naturligtvis är det viktigt att endast be om förklaringar när dessa ligger inom räckhåll för eleverna.

Om syftet med aktiviteten är att eleverna ska formulera sambandet med hjälp av en formel kan frågorna behöva formuleras om något. Istället skulle den första frågan kunna vara: *Hur räknar du ut triangelns area om du vet rektangelns area?* eller ännu mer riktad mot formeln: *Vad ska rektangelns area divideras med för att få triangelns area?* Efter att eleverna har testat sitt samband med olika rektanglar och trianglar kan de få frågan: *Hur beräknar du triangelns area om du vet att rektangelns area beräknas med formeln $Area = basen \cdot höjden$?*

Ett annat dynamiskt arbetsblad med syfte att illustrera ett matematiskt samband visas i figur 2. I detta arbetsblad uppmanas eleverna att beskriva vilket matematiskt samband som illustreras. Även om elevernas interaktion med applikationen är begränsad så behöver de tolka vad som händer när de drar i den inbyggda glidaren för att kunna formulera en slutsats. Eleverna har även möjlighet att dra i triangelns hörn för att övertyga sig om att sambandet verkar gälla för alla trianglar. Arbetsbladet är konstruerat av Tim Brzezinski som gjort många väl genomtänkta dynamiska arbetsblad med GeoGebra.

Figur 2.

Dynamisk illustration av vinkelsumman i en triangel



Kommentar. Se <https://www.geogebra.org/m/pdqxypxu>

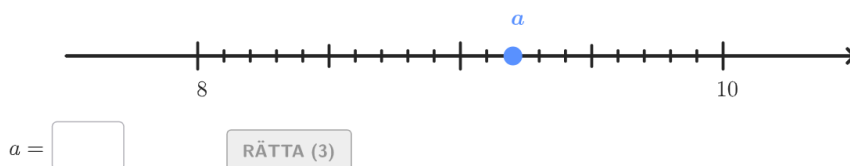
Dynamiska arbetsblad kan även användas för färdighetsträning. I figur 3 visas ett arbetsblad konstruerat av GeoGebra Content Team som är översatt till svenska av Jonas Hall. I arbetsbladet får eleverna träna på att identifiera tal i decimalform på tallinjen. Eleverna får tre möjligheter att svara rätt på varje uppgift. Om de svarar fel första

gången får de en ny chans. Svarar de fel igen, får de en ledtråd i form av en flyttbar punkt, vars värden visas för några placeringar längs tallinjen. Är även det sista svaret fel, ges det korrekta svaret med en illustration på tallinjen.

Figur 3.

Färdighetsträning av tal i decimalform

Vilket tal ligger vid punkten?



Kommentar. se <https://www.geogebra.org/m/keb4vfw8#material/puh2wh7a>

Vi har nu utifrån några exempel diskuterat tre olika syften med ett dynamiskt arbetsblad: undersökande aktivitet, dynamisk illustration samt färdighetsträning. Vi kommer nedan att diskutera aspekter att reflektera kring vid konstruktion av dynamiska arbetsblad.

Konstruktion av dynamiska arbetsblad

Med utgångspunkt i designprinciper för multimedialt lärande har Hohenwarter (skaparen av GeoGebra) och Preiner utvecklat ett antal riktlinjer vid design av dynamiska arbetsblad (Hohenwarter & Preiner, 2008). Det handlar om riktlinjer för a) layouten, b) själva GeoGebra-applikationen samt c) den tillhörande texten. Utifrån dessa riktlinjer samt annan relevant forskning (Joubert, 2017; Sinclair, 2003; Trocki & Hollebrands, 2018) sammanfattar vi nedan ett antal punkter att beakta vid konstruktion av dynamiska arbetsblad.

a) Vad gäller *layouten*, handlar det om att det är gynnsamt:

- om hela arbetsbladet kan synas på skärmen samtidigt (utan att behöva scrolla). Om detta inte är möjligt kan det vara bättre att skapa flera arbetsblad. Vid ett större antal arbetsblad är det numera möjligt att organisera dessa genom att skapa en så kallad GeoGebra-bok.
- att inte använda fler än 3–4 frågor i ett och samma arbetsblad.

b) Vid skapandet av *GeoGebra-applikationer* kan det vara bra att:

- reflektera kring vilken frihet eleverna skall ges vad gäller interaktion med applikationen. Till exempel kan det handla om vilka objekt som skall vara möjliga att variera samt inom vilka gränser (exempelvis inställning på glidare).
- använda avvikande färger eller större storlek för att tydliggöra vilka objekt som går att variera. Exempel på detta ser vi i figur 1 där de flyttbara punkterna har gjorts extra stora samt att de har samma färg som det geometriska objekt de hör till.
- låsa objekt för att undvika att elever av misstag flyttar på objekt såsom en textruta eller en glidare, vilket kan leda till onödig distraktion.
- rikta elevers uppmärksamhet mot det matematiska samband som är i fokus. Detta kan göras genom att markera centrala objekt på något sätt, till exempel med avvikande färg.
- placera en dynamisk text i nära anslutning till det dynamiska objektet. I figur 1 är rektangelns och triangelns areor exempel på dynamisk text som placerats intill motsvarande geometriska objekt. För att ytterligare tydliggöra kopplingen har samma färg använts.
- undvika information/objekt som inte är nödvändig då detta kan leda till onödig kognitiv belastning för eleven. Till exempel kan det handla om att dölja algebrafönstret, ta bort onödiga beteckningar eller namn på objekt eller att reducera antalet tillgängliga verktyg. Det finns även möjlighet att tillfälligt dölja information bakom ”knappar”. På så vis kan eleven succesivt ges nödvändig information. Ett exempel på det sista är kryssrutan för ”Höjd” i figur 1.
- undvika statisk text, såsom instruktioner och frågor, i själva applikationen då detta lätt gör den onödigt plottrig. Istället bör denna placeras antingen ovanför eller under applikationen. Återigen handlar det om att undvika onödig kognitiv belastning.

c) Det finns mycket att reflektera kring även när det gäller *instruktioner* och *uppgiftsformuleringar*. Här handlar det om att:

- formulera frågor och instruktioner som är korta och tydliga samt gärna med ett personligt tilltal, exempelvis genom att använda ordet ”du” (eller ”ni” om det handlar om par- eller grupparbete).
- reflektera kring hur styrande instruktionerna bör vara och hur preciserad en uppmaning/fråga skall vara. Flera studier visar att det ofta finns behov av att precisera frågor som ställs till elever. Ett exempel på en sådan precisering gavs i den undersökande aktiviteten i figur 1 där frågorna omformulerades för att rikta elevers uppmärksamhet mot formeln för triangelns area.
- tydliggöra kopplingen mellan texten och applikationen, exempelvis genom att färgmarkera ord som hör ihop med specifika objekt i applikationen. I

instruktionerna till den undersökande aktiviteten i figur 1 har denna möjlighet använts.

Även om flera av riktlinjerna ovan kan tyckas självklara framhåller Hohenwarter och Preiner att de är värda att reflektera över, både när lärare skapar egna dynamiska arbetsblad och när de väljer bland befintliga färdigkonstruerade applikationer/arbetsblad.

Referenser

Arzarello, F. & Robutti, O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. *ZDM*, 42(7), 715–731.

Hohenwarter, M. & Preiner, J. (2008). Design guidelines for dynamic mathematics worksheets. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 6(2), 311–323.

Joubert, M. (2017). Revisiting theory for the design of tasks: special considerations for digital environments. I A. Leung & A. Baccaglioni-Frank (red.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks* (s. 17–40). Springer.

Noss, R., Healy, L. & Hoyle, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 203–233.

Sinclair, M. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 289–317.

Skolverket. (2022). *Få syn på digitaliseringen på grundskolenivå*. Skolverket.

Trocki, A. & Hollebrands, K. (2018). The development of a framework for assessing dynamic geometry task quality. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 4(2–3), 110–138.